TD 25 Convexité de fonctions

Généralités

Exercice 25.1. Soit I, J deux intervalles non vides, non réduit à un point. Soit $g : I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $f : J \longrightarrow \mathbf{R}$ tels que $g(I) \subset J$. On suppose que f, g sont des fonctions convexes et que f est croissante. Montrer que $f \circ g$ est convexe.

Exercice 25.2. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe strictement croissante. Montrer que f tend vers $+\infty$ et $+\infty$.

Exercice 25.3. Soit I un intervalle ouvert non vide. Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

1. Montrer que si f est convexe sur I, alors f est continue sur I.
2. Montrer, à l'aide d'un dessin par exemple, que si I est un intervalle fermé et que f est convexe sur I, alors on n'a pas nécessairement f continue sur I.

Étude de fonctions

Exercice 25.4. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^4 + 4x - 1$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   (b) Déterminer une équation de cette tangente.
2. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.
3. Déterminer le point de $\mathscr{C}_f$ où la tangente est horizontale.
4. Déterminer le tableau de variations de f.
5. Étudier la convexité de f.
6. Tracer $\mathscr{C}_f$ sur $[-2\,;\,1]$.

Exercice 25.5. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-\frac{3}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction impaire sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et donner sa dérivée. La fonction est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.
6. Étudier la convexité de f. On précisera les points d'inflexion éventuels de f ainsi qu'une équation des tangentes en ces points.
7. Tracer la courbe représentative de f en tenant compte de toutes les informations obtenues dans l'exercice.

Exercice 25.6. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et expliciter f'.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Étudier la convexité, concavité et points d'inflexion de f.
4. Tracer dans un repère orthonormé de la courbe de f, ainsi que la tangente au point d'inflexion.

Inégalités de convexité

Exercice 25.7. Montrer, en utilisant la convexité, que pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $x \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant x(\mathrm{e}-1)$.

Exercice 25.8. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in [0\,;+\infty[\,,\quad x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0.$$

Exercice 25.9. Montrer que $f : \begin{array}{ccc}]1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(\ln(x)) \end{array}$ est concave. En déduire :

$$\forall x, y \in\,]1\,;+\infty[\,,\quad \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Exercice 25.10 (*Inégalité de Jensen, inégalité arithmético-géométrique*). Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit f une fonction concave définie sur un intervalle I. Soit $x_1, \ldots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}_+$. Montrer que si $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, alors
$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$
Cette inégalité est appelée **inégalité de Jensen**.
2. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. En utilisant la concavité de la fonction ln, montrer l'**inégalité arithmético-géométrique** :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k \geqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}.$$

Exercice 25.11 (*Inégalités de Hölder et Minkowski*). Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, $p \in\,]1\,;+\infty[$. Pour tout $X \in \mathbf{R}^n$, on appelle **norme** p de X le réel positif

$$\|X\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Montrer que pour tous $X \in \mathbf{R}^n$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, $\|\lambda X\|_p = |\lambda| \,.\, \|X\|_p$.
2. Montrer que pour tout $X \in \mathbf{R}^n$, $\|X\|_p = 0$ si et seulement si $X = 0_{\mathbf{R}^n}$.
3. Soit $p, q > 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
   (a) Montrer que pour tous $x, y > 0$, $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.
   (b) Inégalité de Hölder. Montrer que
   $$\forall X, Y \in \mathbf{R}^n,\quad \left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leqslant \|X\|_p \,.\, \|Y\|_q\,.$$
4. Inégalité de Minkowski. Soit $p > 1$. Montrer que
$$\forall X, Y \in \mathbf{R}^n,\quad \|X+Y\|_p \leqslant \|X\|_p + \|Y\|_p\,.$$