TD 24 — Problèmes d'analyse asymptotique

Solutions d'équations à paramètres

Exercice 24.1. Pour tout entier n non nul, on définit la fonction polynomiale $p_n : x \longmapsto x^3 + nx + n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, p_n possède un unique zéro réel, que l'on note x_n. Déterminer $\lfloor x_n \rfloor$.
2. Pour $n \in \mathbf{N}$ avec $n \geqslant 2$, déterminer le signe de $p_n(x_{n-1})$, et en déduire la monotonie de la suite (x_n).
3. Justifier que (x_n) converge.
4. On note ℓ la limite de (x_n). Montrer que $x_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
5. En réitérant le procédé, montrer qu'on a le développement asymptotique
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 24.2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $I_n = \left]n\pi - \dfrac{\pi}{2} \,;\, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique $x_n \in I_n$ tel que $\tan(x_n) = x_n$.
2. Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$. En donner un équivalent simple.
3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $y_n = x_n - n\pi$.
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $y_n = \mathrm{Arctan}(x_n)$.
   (b) Quelle est la limite de (y_n) ?
4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $z_n = x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2}$.
   (a) Soit $x > 0$. Rappeler la valeur de $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   (b) Donner un équivalent simple de (z_n).
   (c) Quel développement asymptotique vient-on d'obtenir ?

Suites récurrentes

Exercice 24.3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0. Indication : vous pouvez montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
2. Montrer que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n+1}$ puis en déduire un équivalent de (u_n).
3. Montrer que :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{2n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 24.4. On note $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad u_{n+1} = \ln(n + u_n).$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ possède une limite et la déterminer.
2. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \leqslant \ln(2n)$.
   (b) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
3. Montrer que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Suites d'intégrales

Exercice 24.5. On considère, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t}} \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

1. Déterminer la limite de (u_n).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}}{\sqrt{2}} - (n+1)u_n + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t t^{n+1} \, \mathrm{d}t}{2(1+t)^{3/2}}.$$
3. En déduire que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{\sqrt{2n}}$.

Bijection réciproque

Exercice 24.6. On note $f : x \longmapsto x \exp(x^2)$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.
2. Justifier que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 4 en 0 et donner ce développement limité.

Exercice 24.7. On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I =]-1\,; +\infty[$ par

$$f(x) = x + \ln(1+x).$$

1. Démontrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J que l'on explicitera.
2. Justifier que f^{-1} admet un $\mathrm{DL}_3(0)$, puis déterminer celui-ci.
3. Déterminer développement limité de f^{-1} au voisinage de $+\infty$ et en déduire une équation de l'asymptote à la courbe représentative de f^{-1} au voisinage de $+\infty$.