

TD 23

ÉTUDE DE SUITES
RÉCURRENTES

Exercice 23.1. Soit $a \in \mathbf{R}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 + 1.$$

1. Quel est le sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$?
2. Étudier la limite de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Exercice 23.2 (Suite de Héron). On considère la suite u définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right).$$

Étudier la nature de cette suite et préciser sa limite éventuelle.

Exercice 23.3. Introduisons $f : x \mapsto x - \ln x$ définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

1. (a) Étudier la fonction f et tracer sa courbe, ainsi que la droite d'équation $y = x$.
(b) Montrer que $f(\mathbf{R}_+^*) \subset [1; +\infty[$ (cela revient à montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 1$).
2. Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. Soit u la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n)$.
(a) À l'aide des graphes précédemment tracés, représenter sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite u dans le cas $a = 2$. Émettre une conjecture sur le comportement de u dans les cas $a < 1$ et $a \geq 1$.
(b) Pour quelle valeur de a la suite u est-elle constante ?
(c) Dans cette question, on suppose $a > 1$.
i. Montrer que tous les termes de la suite sont supérieurs à 1.
ii. Montrer que la suite u est monotone.
iii. En déduire sa nature, et la valeur de sa limite.
- (d) On suppose à présent que $a < 1$. Quelle est la nature de la suite ?

Exercice 23.4. On cherche à résoudre de manière approchée l'équation :

$$x = 1 + \operatorname{Arctan} \left(\frac{x}{2} \right) \quad (\text{E})$$

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 1 + \operatorname{Arctan} \left(\frac{x}{2} \right)$ est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne.
2. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution, que nous notons a , et déterminer la partie entière de a .
3. Prouver que si u est une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n , alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |u_n - a|.$$

En déduire qu'une telle suite converge vers a .

4. En considérant une telle suite pour une valeur appropriée de u_0 , déterminer un entier n pour lequel u_n est une valeur approchée de a à 10^{-3} près.

Exercice 23.5. 1. Montrer que $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{2}$ admet un unique point fixe ℓ dans $\mathbf{R}$.

2. Donner la nature de la suite récurrente définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \cos(u_n)$.

Exercice 23.6. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = (2x + 1)e^{-x}.$$

1. Montrer que $e^{-5/4} < \frac{5}{14}$, puis que $3e^{-1} \leq \frac{5}{4}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions de signes contraires dans $\mathbf{R}$. On note a la solution positive. Montrer que a appartient à l'intervalle $I = \left[1; \frac{5}{4}\right]$.
On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

3. Montrer que I est un intervalle stable par f . Vous pourrez admettre que $e^{-5/4} \geq \frac{2}{7}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge. Donner une valeur de $n \in \mathbf{N}$ pour laquelle u_n est une valeur approchée de a à 10^{-4} près.

Exercice 23.7. Étudier la convergence de la suite définie par

$$u_0 = \frac{7}{4} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}.$$

On pourra admettre que $x \mapsto \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$ possède un unique point fixe (vous pouvez essayer de le démontrer, mais la calculatrice sera utile!).

Exercice 23.8. Soit f et g deux fonctions définies et continues sur le segment $[0; 1]$, à valeurs dans $[0; 1]$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Le but de l'exercice est de démontrer que les graphes de f et g ont un point commun. Pour cela, on suppose qu'il n'existe pas de nombre réel α appartenant à $[0; 1]$ tel que $f(\alpha) = g(\alpha)$.

1. Démontrer que f admet au moins un point fixe sur $[0; 1]$. Par suite, a désigne un point fixe de f .
2. Montrer que la fonction $f - g$ est de signe constant.
3. On introduit la suite u définie par $u_0 = a$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$.
 - (a) Démontrer que pour tout entier naturel n , u_n est un point fixe de f .
 - (b) En déduire que la suite u est monotone.
 - (c) Montrer que la suite u converge, vers un nombre réel de $[0; 1]$ que nous noterons ℓ .
 - (d) Démontrer que ℓ est à la fois un point fixe de f et de g .
4. Conclure.