TD 22 Développements limités

Calcul de développements limités

Exercice 22.1. Déterminer, s'il existe, le développement limité en 0 à l'ordre indiqué des fonctions définies au voisinage de 0 par les expressions suivantes :

1. $\cos(2x)$ (ordre 3) ;

2. $\sin(x) - x + x^7$ (ordre 3) ;

3. $x - \ln(1+x)$ (ordre 3) ;

4. $(\mathrm{e}^x)^2$ (ordre 4) ;

5. $\sin(x + x^2)$ (ordre 3) ;

6. $\sqrt{1 + x + x^2}$ (ordre 3) ;

7. $\sin^2(x)$ (ordre 5) ;

8. $\mathrm{e}^x(1 + x + x^2)$ (ordre 2) ;

9. $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ (ordre 3) ;

10. $\ln(\cos x + \sin x)$ (ordre 3) ;

11. $\exp(1 + 2x)$ (ordre 4) ;

12. $\dfrac{\cos x}{1+x}$ (ordre 4) ;

13. $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1-2x}$ (ordre 3) ;

14. $\dfrac{\sin(2x)}{x+x^2}$ (ordre 3) ;

15. $\sqrt{1+x^2}\mathrm{e}^x$ (ordre 2) ;

16. $\exp(\dfrac{\sin x}{x})$ (ordre 4) ;

17. $\tan(x)$ (ordre 6) ;

18. $\tan(\dfrac{x}{1-x^2})$ (ordre 4) ;

19. $\dfrac{1}{1+\cos(x)}$ (ordre 2) ;

20. $\sqrt{\dfrac{x-4}{x-1}}$ (ordre 2) ;

21. $\mathrm{Arctan}(x)$ (ordre 4) ;

22. $\mathrm{Arcsin}(x)$ (ordre 4) ;

23. $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ (ordre 3) ;

24. $\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ (ordre 4) ;

25. $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ (ordre 5) ;

26. $\displaystyle\int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ (ordre 4).

Exercice 22.2. Déterminer le développement limité au point a l'ordre indiqué des fonctions définies au voisinage de a par les expressions suivantes :

1. $\sin(2x)$ en $a = \frac{\pi}{2}$ (ordre 5) ;

2. $(\ln x)^2$ en $a = 3$ (ordre 2) ;

3. $\sqrt{3x} - \sqrt{3+x}$ en $a = 1$ (ordre 2) ;

4. $\exp(x^2)$ en $a = 2$ (ordre 3).

Exercice 22.3. Écrire les développements limités à l'ordre 5 en 0 des fonctions sin, Arcsin, sh, tan, Arctan. En déduire qu'au voisinage de 0, à droite de 0, on a :

$$\mathrm{Arctan}(x) \leqslant \sin(x) \leqslant x \leqslant \mathrm{sh}(x) \leqslant \mathrm{Arcsin}(x) \leqslant \tan(x).$$

Exercice 22.4. **1.** Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \longmapsto \ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k\right)$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Calculer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \longmapsto \ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Exercice 22.5. Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0. Montrer que si f est une fonction paire (resp. impaire), son développement limite ne contient que des termes de degré pair (resp. impair).

Applications des développements limités

Exercice 22.6. **1.** Déterminer un équivalent simple de $f : x \longmapsto \sin(x) + \tan(x)$ en 0.

2. Déterminer un équivalent simple de $f : x \longmapsto x^3 + \mathrm{e}^x - 1$ en 0.

3. Déterminer un équivalent simple de $f : x \longmapsto \mathrm{Arcsin}(x) + \cos(x) - 1$ en 0.

4. Déterminer un équivalent simple de $f : x \longmapsto \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} - \sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{x^3}}$ en $+\infty$.

Exercice 22.7. Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos(x+x^2)}{1+x+x^2} - \mathrm{e}^{-x}\right)$;

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$;

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}}}{x}$;

4. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1 - 4\sin^2 \frac{\pi x}{6}}{1-x^2}$;

5. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{6} \\ x<\frac{\pi}{6}}} (1 - 2\sin(x))\tan(3x)$;

6. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{2} \\ x<\frac{\pi}{2}}} \left(\frac{2}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\ln(\sin(x))}\right)$.

Exercice 22.8. Montrer que les fonctions suivantes peuvent être prolongées par continuité en 0, et étudier la dérivabilité en 0 des fonctions ainsi définies.

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$;

2. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}\ln(\cos x)$;

3. $x \longmapsto \dfrac{\cos(2x^2) - 1}{x^2}$;

4. $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1-\cos(3x)}{x^2}\right)$;

5. $x \longmapsto \exp\left(\dfrac{(1+2x)^{\frac{1}{2}} - 1}{x}\right)$;

6. $x \longmapsto (1+2x)^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 22.9. Pour chacune des fonctions f suivantes, donner l'équation de la tangente au point d'abscisse a indiqué, et trouver la position de la courbe représentative de f par rapport à cette tangente au voisinage du point a.

1. $f : x \longmapsto \sin^2(x) - \dfrac{x^2}{1+x^2}$, $a = 0$.

2. $f : x \longmapsto \sin(x) + \mathrm{Arcsin}(x)$, $a = 0$.

3. $f : x \longmapsto \sqrt{3x} - \sqrt{3+x}$, $a = 1$.

Exercice 22.10. Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer l'asymptote et trouver la position de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote, au voisinage de $+\infty$.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2+x+1}$;

2. $f : x \longmapsto (2x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$;

3. $f : x \longmapsto (x^3+x^2+1)^{\frac{1}{3}}$;

4. $f : x \longmapsto x\left(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x) - \dfrac{3x^2}{1+3x^2}\right)$.

Exercice 22.11. Soit $a, b, c \in \mathbf{R}$. On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \qquad u_n = a\ln(n) + b\ln(1+n) + c\ln(1+n^2).$$

Déterminer les valeurs de a, b, c pour lesquelles $u_n \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.