TD 21 Comparaison locale des fonctions

Petits o, grands O

Exercice 21.1. **1.** On considère les fonctions :

$$f_1 : x \longmapsto x^2 \qquad f_2 : x \longmapsto 4x^2\ln(x) \qquad f_3 : x \longmapsto 2x^3 \qquad f_4 : x \longmapsto 7\sqrt{x} \qquad f_5 : x \longmapsto -3\cos(x)x^2$$

ainsi que la fonction $g : x \longmapsto x^2 + 4x^2\ln(x) + 2x^3 + 7\sqrt{x} - 3\cos(x)x^2$.

(a) Déterminer tous les couples d'indices (i, j) pour lesquels $f_i(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(f_j(x))$.

(b) Déterminer tous les couples d'indices (i, j) pour lesquels $f_i(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}(f_j(x))$.

(c) Déterminer l'exposant $\alpha \in \{3; 2; 1/2\}$ tel qu'on puisse écrire

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}(x^\alpha)\,.$$

(d) Déterminer un équivalent de g en 0.

(e) Mêmes questions au voisinage de $+\infty$ pour les mêmes fonctions.

2. On considère les fonctions :

$$f_1 : x \longmapsto \frac{1}{x^2} \quad f_2 : x \longmapsto \frac{13}{x^3} \quad f_3 : x \longmapsto \frac{1}{(\ln(x))^2} \quad f_4 : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$$

ainsi que la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{13}{x^3} + \dfrac{1}{(\ln(x))^2} + \mathrm{e}^{-x}$.

(a) Déterminer tous les couples d'indices (i, j) pour lesquels $f_i(x) \underset{x\to +\infty}{=} \mathrm{o}(f_j(x))$.

(b) Déterminer un équivalent de g en $+\infty$.

Équivalents

Exercice 21.2. **1.** Déterminer un équivalent simple au voisinage du point indiqué des fonctions suivantes

(a) $x \longmapsto \cos(\sin(x))$ en 0 ; **(b)** $x \longmapsto \tan(\sin(x))$ en 0 ; **(c)** $x \longmapsto \ln(\cos(x))$ en 0 ;
(d) $x \longmapsto \exp(\cos(x)) - 1$ en $\pi/2$; **(e)** $x \longmapsto \ln(\sin(x))$ en 0.

2. Déterminer un équivalent des fonctions suivantes au voisinage du point indiqué.

(a) $x \longmapsto \mathrm{Arcsin}(x)$ en 0 ; **(b)** $x \longmapsto \mathrm{Arccos}(x) - \pi/2$ en 0 ;
(c) $x \longmapsto \mathrm{sh}(x)$ en 0 ; **(d)** $x \longmapsto \tan(x) - \sqrt{3}$ en $\pi/3$.

3. Déterminer un équivalent simple de la fonction tangente au voisinage de π.
En déduire un équivalent simple de $x \longmapsto \tan\left(\dfrac{\pi}{2x+1}\right)$ au voisinage de 0.

Exercice 21.3. Trouver un équivalent simple des fonctions suivantes, au point indiqué :

1. $x \longmapsto \dfrac{x^3 + 3x^2 - 2}{3x^2 - 5x + 6}$ en $+\infty$, puis en 0 ;

2. $x \longmapsto \dfrac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$ en $\dfrac{\pi}{4}$;

3. $x \longmapsto \dfrac{x^5 + 2x^3}{3x^2 + 4x}$ en 0 ;

4. $x \longmapsto \ln(1 + x^2 + 5x^4)$ en 0 puis en $+\infty$;

5. $x \longmapsto \lfloor x^2 \rfloor$ en $+\infty$;

6. $x \longmapsto \ln(1 + x^2) + \cos x$ en $+\infty$ puis en 0 ;

7. $x \longmapsto \ln(x)$ en 1 ;

8. $x \longmapsto \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{100}{x^3}$ en 0, en $+\infty$ puis en -1 ;

9. $x \longmapsto \sin(3x^2) + \ln(1 + 2x)$ en 0 ;

10. $x \longmapsto \sin(\mathrm{e}^{-x})$ en $+\infty$;

11. $x \longmapsto \ln(5x^2 + \mathrm{e}^{2x})$ en $+\infty$ puis en 0 ;

12. $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{(x^2)} + 3x^2}{x^5 + \ln x}$ en $+\infty$ puis en 0.

Exercice 21.4. Trouver un équivalent simple des suites de terme général :

1. $\dfrac{n^4+2n^3-1}{3n+2}$;
2. $\exp\left(\dfrac{1}{n}\right)-\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$;
3. $\dfrac{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$;
4. $\sqrt{n}\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$;
5. $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+5}+\dfrac{1}{4n^2}$;
6. $3+\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\dfrac{6}{n}$;
7. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right)}$;
8. $(n+\ln(n))\,\mathrm{e}^{-n+1}$;
9. $\ln(n+1)-\ln(n+2)$;
10. $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$;
11. $\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right)$;
12. $\ln\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right)+\tan\left(\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$;
13. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$;
14. $\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}$;
15. $n^{1/n}-1$.

Exercice 21.5. Soit $a\in\mathbf{R}^\star$. Déterminer un équivalent de la suite de terme général $\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$.

Exercice 21.6. Donner la factorisation de a^3-b^3 par $a-b$, où $(a,b)\in\mathbf{R}^2$. En déduire la limite de la suite u de terme général $u_n=(n+1)^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}$. Retrouver ce résultat en utilisant les équivalents usuels.

Exercice 21.7. Déterminer la limite (si elle existe) des fonctions suivantes au point indiqué en utilisant des équivalents :

1. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\cos(x)-1}-1}{x^2}$ en 0 ;
2. $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}}{x-\sqrt{x}}$ en 1 ;
3. $h(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{\sin(x-2)}$ en 2 ;
4. $k(x)=(1+x)^{1/x}$ en 0.

Exercice 21.8. En utilisant les équivalents, déterminer les limites, si elles existent, des suites de terme général :

1. $\ln(n)\left(\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\ln\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right)\right)$;
2. $n\ln n-\dfrac{n^2+1}{\ln n}+\sqrt{n+3}$;
3. $\dfrac{\ln(n^4+n^2+1)}{n+3}$;
4. $\dfrac{\ln(1+\sin\frac{1}{n})}{\sqrt{1-\cos\frac{1}{n}}}$;
5. $\left(\exp\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)-\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln(n^3+n)$;
6. $n^3(\exp(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-\sqrt{1+\mathrm{e}^{-n}})$.

Exercice 21.9. Utiliser des équivalents pour calculer les limites suivantes ($x\in\mathbf{R}$) :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$;
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$;
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n-x}\right)^n$;
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+5n-4}{n^2-3n+7}\right)^n$;
5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$;
6. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$.

Exercice 21.10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite positive telle que

$$\forall n\in\mathbf{N}^\star,\qquad \frac{2(2n+1)}{\pi}\leqslant u_n^2\leqslant\frac{(2n+1)^2}{n\pi}.$$

Déterminer un équivalent de (u_n).

Exercice 21.11 (*Logarithme d'un équivalent*). **1.** Donner deux suites équivalentes (u_n) et (v_n) telles que $\ln(u_n)$ et $\ln(v_n)$ ne soient pas équivalents.

2. Montrer que si $u_n\sim v_n$ et si la suite $(|\ln(v_n)|)$ est minorée par un nombre réel strictement positif alors $\ln(u_n)\sim\ln(v_n)$.

Indication : (x_n) tend vers 1 si, et seulement si, la suite (x_n-1) tend vers 0.

3. Donner un équivalent de la suite de terme général $\ln(\sin(\dfrac{1}{n}))$.