TD 20 Dérivabilité de fonctions

Étude de la dérivabilité

Exercice 20.1. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Que peut-on dire de f' si f est paire (resp. impaire, resp. périodique) ? Examiner la réciproque dans le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 20.2. Pour les fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition, un ensemble sur lequel elles sont dérivables et l'expression de la dérivée.

1. $f_1 : x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(1-x^2)$;
2. $f_2 : x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x\sqrt{1-x})$;
3. $f_3 : x \longmapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$;
4. $f_4 : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+\operatorname{ch}(2x))}{x}$;
5. $f_5 : x \longmapsto 3^{4x^2-1}$;
6. $f_6 : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1}{2\sin x - 1}}$.

Exercice 20.3. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction $f : x \longmapsto \big||x-1|-2\big|$.

Exercice 20.4. Déterminer si les fonctions suivantes sont dérivables sur $\mathbf{R}$.

1. $f : x \longmapsto \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ -4x+1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$
2. $g : x \longmapsto \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ (x-1)^3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

Exercice 20.5. Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction

$$f : x \longmapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor}\left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}\right).$$

Exercice 20.6. Déterminer si les fonctions f suivantes définie sur $\mathbf{R}_+$ possèdent une dérivée en 0. Si c'est le cas, calculer $f'(0)$ et décider si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$.

1. $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+\sqrt{x^5}}$;
2. $f : x \longmapsto \cos(\sqrt{x})$;
3. $f : x \longmapsto \begin{cases} x^x & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

Exercice 20.7.

1. Montrer que la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[\setminus\{0\}$ par
$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$
est prolongeable par continuité en 0. On désigne encore par f ce prolongement par continuité.
2. Montrer que la fonction f ainsi définie sur $]-1\,;+\infty[$ est de classe $\mathscr{C}^1$. On admettra qu'il existe $\varepsilon : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ tel que pour tout $x > -1$,
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$
avec ε qui tend vers 0 en 0.

Exercice 20.8. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+$ vérifiant $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ telle que $g(x^2) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+$.

Exercice 20.9. Soit f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, paire, 4-périodique telle que pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x) = x^2$ et pour tout $x \in]1\,;2]$, $f(x) = 4\sqrt{x} - 3$.

1. Tracer f sur $[-5\,;6]$. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et tout $x \in [n\,;n+1]$, expliciter $f(x)$.
2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;2[$ et sur $]-2\,;0[$.
3. Expliciter f sur $]-1\,;1[$. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-2\,;2[$.

4. La fonction f est-elle dérivable en 2 ?

5. Déterminer les maxima locaux de f.

Exercice 20.10. Soit $f : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable vérifiant $f(0) = f(1)$. Introduisons la fonction g définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si} \quad x \leqslant 1/2 \\ f(2x-1) & \text{si} \quad x > 1/2 \end{cases}$$

1. Montrer que g est une fonction continue.

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que g soit dérivable sur $[0\,;\,1]$.

Exercice 20.11 (*Recollement de solutions*). **1.** Trouver les solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + |x|y = x.$$

2. Parmi ces solutions, lesquelles sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$?

Exercice 20.12. Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbf{R}$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$xf'(x) - 2f(x) = x^4.$$

Dérivées successives

Exercice 20.13. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par $f_n(x) = x^n|x|$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbf{R}$, mais n'est pas $(n+1)$ fois dérivable sur $\mathbf{R}$.

Exercice 20.14 (*Formule de Vandermonde*). Soit n un entier naturel. On définit sur $\mathbf{R}$ la fonction f_n en posant $f_n(x) = x^n$.

1. Calculer les dérivées successives de f_n.

2. Calculer la dérivée d'ordre n de f_{2n} directement, puis en dérivant $f_{2n} = f_n \times f_n$ (et en utilisant la formule de Leibniz).

3. En déduire la relation :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 20.15. Les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition. Calculer leur dérivée n-ième pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1. $f_1 : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$;

2. $f_2 : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$;

3. $f_3 : x \longmapsto \sin(2x)$;

4. $f_4 : x \longmapsto (x^2 - 5x + 1)e^{4x}$;

5. $f_4 : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$;

6. $f_5 : x \longmapsto e^x \cos(x)$;

7. $f_6 : x \longmapsto \sin^3(x) + \cos^3(x)$;

8. $f_7 : x \longmapsto x^3 \sin(x)$.

Exercice 20.16. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. Est-elle de classe $\mathscr{C}^2$?

3. Pouvez-vous généraliser les résultats obtenus ?

Exercice 20.17. Pour tout $(n, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$, introduisons la fonction $f_{n,\alpha}$ définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f_{n,\alpha} : x \longmapsto \begin{cases} x^n \sin(\frac{1}{x} - \alpha) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Soit $(n, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$.

1. Montrer que $f_{n,\alpha}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^\star$ et exprimer sa dérivée à l'aide de fonctions $f_{p,\beta}$, où $(p,\beta) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$.

2. Pour quelles valeurs de n la fonction $f_{n,\alpha}$

(a) admet-elle une limite en 0 ?
(b) est-elle continue en 0 ?
(c) est-elle dérivable en 0 ?
(d) est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$?
(e) est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Exercice 20.18. Soit $f : x \longmapsto -3\sin^2(x) + 5$ définie sur $D = \left[\pi\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ et à valeurs dans $[2\,;\,5]$.

1. Montrer que f est bijection. On notera g sa bijection réciproque.

2. Préciser les domaines de définition et de dérivabilité de g

3. Calculer $g'\left(\dfrac{11}{4}\right)$.

Exercice 20.19. On note f la fonction définie sur $[0\,;\,1[$ par :

$$\forall x \in [0\,;\,1[, \quad f(x) = \operatorname{Arcsin}(x).$$

1. Montrer que f est solution sur $[0\,;\,1[$ de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - xy' = 0.$$

2. La fonction f est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0\,;\,1[$. À l'aide de la formule de Leibniz, prouver que les dérivées successives de f sont toutes positives ou nulles.

Propriétés des fonctions dérivables

Exercice 20.20. Soit a, b deux réels avec $a < b$. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\,;\,b]$, dérivables sur $]a\,;\,b[$. Montrer qu'il existe $c \in\ ]a\,;\,b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Exercice 20.21. Soit f une fonction numérique dérivable sur $\mathbf{R}$, admettant $+\infty$ pour limite en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que f' s'annule.

Exercice 20.22. Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $[0\,;\,+\infty[$, dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. On suppose que f tend vers $f(0)$ en $+\infty$.

1. Montrer que f est bornée sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Montrer qu'il existe $c \in\,]0\,;\,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 20.23. Soit $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$. Soit f une fonction définie sur $[a\,;\,b]$, dérivable sur $[a\,;\,b]$. On suppose que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in\ ]a\,;\,b[$ tel que la droite passant par $(a, f(a))$ et $(c, f(c))$ soit tangente à la courbe représentative de f.

On pourra considérer la fonction φ définie sur $[a\,;\,b]$ par $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ si $x \neq a$ et $\varphi(a) = 0$.

Exercice 20.24. **1.** Soit I un intervalle ouvert, et f une fonction numérique définie et dérivable sur I. Supposons que f' admette au plus k zéros distincts sur I, avec $k \geqslant 1$. Démontrer que f admet au plus $k+1$ zéros distincts sur I.

2. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ et $n \in \mathbf{N} \backslash \{0; 1\}$. Montrer que l'équation suivante admet au plus trois solutions :

$$x^n + ax + b = 0.$$

Exercice 20.25. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbf{R}$ telle qu'il existe deux réels a et b distincts, vérifiant

$$f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0.$$

Montrer qu'il existe un nombre réel c compris entre a et b tel que $f^{(3)}(c) = 0$.

Exercice 20.26. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes :

1. $\sqrt{10\ 001} \approx 100\,;$ **2.** $\dfrac{1}{0,999^2} \approx 1\,;$ **3.** $\cos(1) \approx \dfrac{1}{2}.$

Exercice 20.27. Montrer que pour tous $x, y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$|\tan(x) - \tan(y)| \geqslant |x - y|\,.$$

Exercice 20.28. On introduit la suite (S_n) de terme général

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^\star, \quad \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leqslant \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

2. En déduire un encadrement du terme général de la suite (S_n), puis montrer que cette suite converge et déterminer sa limite.