TD 19 — Continuité de fonctions

Continuité et prolongement par continuité

Exercice 19.1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x < -2 \\ a & \text{si} \quad x = -2 \\ (2x+b)^2 & \text{si} \quad x > -2 \end{cases}$$

soit continue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 19.2. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x - \lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}}$.

1. Montrer que la fonction f est bornée.
2. Calculer, si elle existe, la limite de f en 0.
3. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}_+^\star \backslash \mathbf{N}^\star$.
4. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Calculer, si elle existe, la limite de f à gauche en n, puis à droite en n. La fonction f est-elle continue en n ?

Exercice 19.3. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$|f(x)| \leqslant |\sin(x)|.$$

Cette application est-elle continue en 0 ?

Exercice 19.4. Soit $f : \begin{array}{ccc}]0\,;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin x} \end{array}$. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

Exercice 19.5. Donner le domaine de définition et étudier la continuité des fonctions suivantes. Vous préciserez si les fonctions sont prolongeables aux extrémités de leur ensemble de définition.

1. $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$;
2. $g : x \longmapsto \sqrt{(x-1)\ln(x^2 - 3x + 2)}$.

Exercice 19.6. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto (1+2x)^{1/x}$. Vous préciserez si on peut prolonger cette fonction en chaque extrémité de son ensemble de définition.

Exercice 19.7. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Peut-on prolonger les fonctions suivantes par continuité en les extrémités finies de leur intervalle de définition ?

1. $a : \begin{array}{ccc}]-1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^3+6x+7}{x^3+1} \end{array}$
2. $b : \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(1+x)^n - 1}{2x} \end{array}$
3. $c : \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1} \end{array}$
4. $d : \begin{array}{ccc} \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2+2^{\tan x}} \end{array}$
5. $e : \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$
6. $f : \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$

Exercice 19.8. Soit f et g deux fonctions numériques définies et continues sur $\mathbf{R}$. On note $\max(f,g)$ la fonction $x \longmapsto \max\{f(x), g(x)\}$. Montrer que

$$\max(f,g) = \frac{f + g + |f-g|}{2}.$$

En déduire que $\max(f,g)$ est une fonction continue, puis que la fonction $\min(f,g)$ est continue.

Caractérisation séquentielle de la continuité

Exercice 19.9. Soit f une fonction continue en 0 vérifiant pour tout nombre réel x,

$$f(x) = f(2x).$$

Monter que f est constante.

Exercice 19.10. Soit f et g deux fonctions numériques définies et continues sur $\mathbf{R}$. On suppose que

$$\forall q \in \mathbf{Q}, \quad f(q) = g(q).$$

Montrer que $f = g$.

Exercice 19.11. On cherche à déterminer l'ensemble E des fonctions f continues sur $\mathbf{R}$ vérifiant pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(2x+1) = f(x)$.

1. On considère une suite u définie par la donnée de son premier terme $u_0 = x \in \mathbf{R}$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2}.$$

- **(a)** Montrer que u converge et déterminer sa limite.
- **(b)** Soit $f \in E$. Montrer que la suite de terme général $f(u_n)$ est constante. En déduire que f est une fonction constante.

2. Conclure.

Exercice 19.12 (*Équation fonctionnelle de Cauchy*). Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble E des applications continues f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui vérifient pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. On suppose $E \neq \varnothing$. Soit $f \in E$.

- **(a)** Montrer que $f(0) = 0$, puis que f est impaire.
- **(b)** Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(nx) = nf(x)$. Montrer que cette relation est encore valable pour $n \in \mathbf{Z}$.
- **(c)** Montrer que pour tout $r \in \mathbf{Q}$, $f(r) = rf(1)$.
- **(d)** En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = xf(1)$.

2. Montrer que $E = \{x \longmapsto ax \ : \ a \in \mathbf{R}\}$.

Les trois grands théorèmes sur la continuité

Exercice 19.13. Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle I. On suppose que $f(I)$ est un ensemble de cardinal au plus 2. Montrer que f est constante.

Exercice 19.14. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 19.15. Soit f une fonction numérique définie et continue sur $\mathbf{R}$, admettant des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}$. Admet-elle un maximum, un minimum ?

Exercice 19.16. Soit f une fonction continue sur $[a\,;\,b]$, à valeurs réelles et p et q deux nombres réels positifs. Montrer que

$$\exists c \in [a\,;\,b]\,, \quad p\,f(a) + qf(b) = (p+q)f(c).$$

Exercice 19.17. Montrer que la fonction f définie sur $]0\,;\,1]$ par $f(x) = (1-x)\sin\dfrac{\pi}{x}$ est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

Exercice 19.18. Soit f une fonction numérique définie et continue sur $[0\,;\,2]$ vérifiant $f(0) = f(2)$. Montrer qu'il existe $c \in [0\,;\,1]$ tel que $f(c) = f(c+1)$.

Exercice 19.19. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.
On suppose que $f \times f$ est constante sur I. Montrer que f est constante sur I.

Exercice 19.20. Soit I un segment de $\mathbf{R}$ et f et g deux applications continues de I dans $\mathbf{R}$ telles que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) < g(x)$$

Montrer qu'il existe un réel δ strictement positif tel que :

$$\forall x \in I,\ f(x) + \delta \leqslant g(x).$$

Exercice 19.21. Un promeneur parcourt 6 km en une heure. Montrer qu'il existe au moins une période de 30 minutes au cours de laquelle il parcourt exactement 3 km.

Exercice 19.22.

1. Montrer que pour tout nombre réel x strictement supérieur à e, l'équation

$$y - x\ln(y) = 0$$

d'inconnue $y \in]x\,;+\infty[$, admet une unique solution. Pour tout $x > \mathrm{e}$, on note $f(x)$ cette solution.

2. Montrer que la fonction f ainsi définie sur $]\mathrm{e}\,;+\infty[$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer celle-ci.
3. Prouver que f est une fonction croissante.

Exercice 19.23. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $f(\mathbf{R})$.
2. Expliciter $f(\mathbf{R})$ et f^{-1}.

Exercice 19.24. On considère la fonction f définie sur $I = [-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^3}.$$

1. Montrer que f réalise une bijection de I sur I, et démontrer que sa bijection réciproque, notée g, est continue sur I.
2. Montrer que g tend vers $+\infty$ en $+\infty$, puis trouver la limite de $\dfrac{x^{2/3}}{g(x)}$ lorsque x tend vers $+\infty$.