TD 18 — Limites de fonctions

Exercice 18.1. Déterminer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes au point indiqué.

1. $x \longmapsto x - 2\sqrt{x}$ en $+\infty$;

2. $x \longmapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ en $+\infty$;

3. $x \longmapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ en 0 ;

4. $x \longmapsto \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$ en $+\infty$;

5. $x \longmapsto \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$;

6. $x \longmapsto \dfrac{x^3 \ln(x) + \mathrm{e}^x}{\ln(x)^2 + x^2}$ en $+\infty$;

7. $x \longmapsto \dfrac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$ en 0 ;

8. $x \longmapsto \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{4x^2 + 3x + 1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$;

9. $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$;

10. $x \longmapsto \cos\left(x + \frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$;

11. $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{3x+1}}{\ln(x)^4}$ en $+\infty$;

12. $x \longmapsto \dfrac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$ en 0^+ ;

13. $x \longmapsto \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0 ;

14. $x \longmapsto x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ en $+\infty$;

15. $x \longmapsto \dfrac{x+2}{x^2+1}$ en $+\infty$;

16. $x \longmapsto \dfrac{x+2}{x^2+1}$ en 0 ;

17. $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0^+ ;

18. $x \longmapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0^+ ;

19. $x \longmapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0^+ ;

20. $x \longmapsto \dfrac{\sin(x \ln(x))}{x}$ en $+\infty$;

21. $x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{\sin^2(x)}$ en 0 ;

22. $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + x^2}{x^3 + (\ln(x))^2}$ en $+\infty$;

23. $x \longmapsto \left(\frac{1}{x} + \mathrm{e}^x\right)(\mathrm{sh}(x) + x^2)$ en $-\infty$;

24. $x \longmapsto \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ en 1 ;

25. $x \longmapsto \dfrac{\ln(2^x)}{x+1}$ en $+\infty$;

26. $x \longmapsto \ln(x+2) - \ln(x-1)$ en $+\infty$;

27. $x \longmapsto (\ln(x))^2 + 2\ln(x) + 3$ en 0 ;

28. $x \longmapsto x^x$ en 0 ;

29. $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ en 0 ;

30. $x \longmapsto \dfrac{\sin 3x}{1 - 2\cos x}$ en $\frac{\pi}{3}$;

31. $x \longmapsto \mathrm{e}^{1/x}$ en 0 ;

32. $x \longmapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ en 0^+ ;

33. $x \longmapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ en 0^- ;

34. $x \longmapsto \dfrac{x^2 + x\sin(x)}{3x^2 + (1 + \mathrm{Arctan}(x))^2}$ en $-\infty$;

35. $x \longmapsto \dfrac{x}{|x|}$ en 0 ;

36. $x \longmapsto x^{1/x}$ en 0.

Exercice 18.2. Déterminer l'ensemble de définition, puis les asymptotes éventuelles des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}$;

2. $f_2 : x \longmapsto \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$;

3. $f_3 : x \longmapsto \dfrac{x^2 - 1 + \ln x}{x - 1}$.

Exercice 18.3. Soit f une fonction périodique définie sur $\mathbf{R}$ admettant une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 18.4. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}^+$, croissante, telle que la suite $(f(n))_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 18.5. Soit $f : \mathbf{R}_+^\star \longrightarrow \mathbf{R}$ une application croissante, non identiquement nulle, et vérifiant :

$$\forall (x,y) \in (\mathbf{R}_+^\star)^2, \qquad f(xy) = f(x) + f(y).$$

Montrer que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$, puis que f admet $-\infty$ comme limite en 0. Quel résultat intéressant est ainsi démontré ?

Exercice 18.6. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple explicite.

1. Soit f une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de $+\infty$. Si f est strictement positive au voisinage de $+\infty$, alors la limite de f en $+\infty$, si elle existe, est strictement positive.
2. Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et f une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de a, sauf peut-être en a. Si f est bornée au voisinage de a, alors f admet une limite finie en a.
3. Soit f une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de $-\infty$. Si f tend vers $+\infty$ en $-\infty$, alors f est décroissante au voisinage de $-\infty$.
4. Une fonction strictement croissante sur $\mathbf{R}$ a une limite en $+\infty$.
5. Une fonction décroissante sur $\mathbf{R}$ et majorée a une limite finie en $-\infty$.
6. Une fonction croissante sur $]0\,;+\infty[$ est minorée.
7. Si f est une fonction croissante sur $\mathbf{R}$, alors $f(x+1) - f(x)$ a une limite lorsque x tend vers $+\infty$.