TD 17 — Polynômes

Généralités

Exercice 17.1. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Déterminer le degré du polynôme :

$$P(X+1) - P(X)$$

en fonction du degré de P.

Exercice 17.2. On considère la fonction $\varphi : x \longmapsto \mathrm{e}^{-1/x}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^\star$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^\star \quad \varphi^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P_n}(x)}{x^{2n}} \mathrm{e}^{-1/x}.$$

Équations fonctionnelles

Exercice 17.3.

1. Déterminer un polynôme de degré au plus 1 vérifiant $P(2) = 2$ et $P(3) = -1$.
2. Déterminer un polynôme de degré au plus 2 vérifiant $P(-1) = 3$, $P(2) = 1$ et $P(3) = 0$.

Exercice 17.4. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbf{C}[X]$ vérifiant

$$4P = (X-1)P' + P''.$$

Exercice 17.5. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbf{C}[X]$ vérifiant

$$18P = P'P''.$$

Exercice 17.6. Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble E des polynômes P à coefficients réels vérifiant

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(X^2+1) = P(X)^2 + 1.$$

1. Soit $P \in E$. On introduit la suite u définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par $u_{n+1} = u_n^2 + 1$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $P(u_n) = u_n^2 + 1$ pour tout entier naturel n. En déduire que $P = X^2 + 1$.
2. Conclure.

Exercice 17.7.

1. Soit P un polynôme non nul à coefficients réels tel que

$$P(X^2) = P(X)P(X-1).$$

   (a) Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ une racine de P. Montrer que α^2 est une racine de P et en déduire que $|\alpha| = 1$ ou $\alpha = 0$.

   (b) Montrer que 0 n'est pas racine de P.

   (c) Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ une racine de P. Montrer que $|\alpha + 1| = 1$.

   (d) En déduire les racines de P ainsi que la forme du polynôme P.
2. Déterminer l'ensemble des polynômes P à coefficients réels vérifiant

$$P(X^2) = P(X)P(X-1).$$

Exercice 17.8.

1. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$(E) : \quad (1+X^2)^2 P'' - 2X(1+X^2)P' + 2(X^2-1)P = 0.$$

   On s'intéressera au monôme de plus haut degré et à son coefficient dans le membre de gauche de l'égalité quand P est un polynôme de degré n, avec $n \geqslant 2$.

2. En déduire une solution particulière non-nulle de l'équation différentielle

$$(1+t^2)^2y'' - 2t(1+t^2)y' + 2(t^2-1)y = 0.$$

Exercice 17.9. Trouver tous les polynômes de $\mathbf{R}_3[X]$ tels que

$$P(0) = P'(0) = P''(0) = P'''(0) = 1.$$

Exercice 17.10 (*Interpolation de Lagrange*). Soit $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ deux n-uplets de nombres réels tels que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

Le but de cet exercice est de trouver tous les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \widetilde{P}(a_k) = b_k.$$

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on considère le polynôme Q_j défini par

$$Q_j(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$$

Enfin on définit le polynôme L, appelé **polynôme de Lagrange** associé aux n-uplets $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$, par

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} b_j Q_j(X).$$

1. Pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, que vaut $\widetilde{Q_j}(a_i)$?

2. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, que vaut $\widetilde{L}(a_k)$?

3. Montrer que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\widetilde{P}(a_k) = b_k$ alors $P = L$.

4. Soit P un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\widetilde{P}(a_k) = b_k$. En considérant le polynôme $P - L$, déterminer la forme de P.

Divisibilité

Exercice 17.11. **1.** Effectuer la division euclidienne de $A(X) = X^3 + 7X^2 - 2$ par $B(X) = X^2 + X + 1$.

2. En déduire les éventuelles asymptotes obliques de la représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f : x \longmapsto \dfrac{x^3 + 7x^2 - 2}{x^2 + x + 1}$.

Exercice 17.12. Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ soit divisible par $X^2 + X + 1$.

Exercice 17.13. Trouver le reste de la division euclidienne de

1. $X^{2n} + X^n - 1$ par $X - 2$ puis par $X^2 - 4$, où $n \in \mathbf{N}^\star$;

2. $X^n + nX^{n-1} + X^2 + 1$ par $(X-1)^2$, où $n \geqslant 2$.

Exercice 17.14. **1.** Pour tout entier naturel n, déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par $X^2 - 5X + 6$, puis le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $X^2 - 4X + 4$.

2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $(A - I_2)(A - 2I_2) = 0$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $(X-1)(X-2)$, et en déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel n.

3. On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'unique réel λ tel que $B - \lambda I_2$ soit non inversible, puis montrer que $(B - \lambda I_2)^2 = 0$. En déduire l'expression de B^n pour tout entier naturel n.

Exercice 17.15. Pour quelles valeurs de l'entier n le polynôme $X^{2n}+X^n+1$ est-il divisible par le polynôme X^2+X+1 ?

Exercice 17.16. Posons

$$A = 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1 \quad \text{et} \quad B = 4X^3 + 4X^2 - X - 1.$$

Montrer que les polynômes A et B ont une racine commune et la déterminer.

Racines

Exercice 17.17. Soit P un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ et a un nombre complexe. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P et a pour que a soit une racine triple du polynôme :

$$Q(X) = (X - a)(P'(X) + \widetilde{P'}(a)) - 2(P(X) - \widetilde{P}(a)).$$

Exercice 17.18.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$.
2. Montrer que pour tout $n, p, q \in \mathbf{N}$, $1 + X + X^2$ divise $X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$.

Exercice 17.19. Effectuer la division euclidienne du polynôme

$$P = 6X^4 - 49X^3 + 123X^2 - 98X + 24$$

par le polynôme

$$T = X^2 - 7X + 12.$$

En déduire les racines du polynôme P.

Exercice 17.20. Déterminer les racines du polynôme

$$P = 2X^3 - 17X^2 + 40X - 16,$$

sachant que celui-ci admet une racine double.

Exercice 17.21. Démontrer que le polynôme $X^3 - 3X + 1$ admet trois racines réelles distinctes.

Exercice 17.22. Déterminer les racines du polynôme

$$P = 2X^3 - (5 + 6i)X^2 + 9iX + 1 - 3i,$$

sachant que celui-ci admet une racine réelle.

Exercice 17.23. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Montrer que 1 est racine du polynôme $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et déterminer son ordre de multiplicité.

Exercice 17.24. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, le polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a pas de racine multiple.

Exercice 17.25. Soit P un polynôme de $\mathbf{R}_3[X]$ tel que $\widetilde{P}(0)^2 + \widetilde{P}(1)^2 + \widetilde{P}(4)^2 + \widetilde{P}(7)^2 = 0$. Montrer que P est le polynôme nul.

Exercice 17.26. Déterminer les racines du polynôme $X^3 - 8X^2 + 23X - 28$ sachant que deux de ses racines sont de somme égale à la troisième.

Exercice 17.27.

1. Soit $P(X) = n_d X^d + \cdots + n_1 X + n_0$ un polynôme de degré $d \geqslant 1$ à coefficients entiers. Montrer que si P admet une racine N qui est un nombre entier, alors nécessairement N divise n_0.
2. Donner, si elles existent, les racines entières de $X^3 - X^2 - 109X - 11$ et de $X^{10} + X^5 + 1$.

Exercice 17.28. Soit $(P_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de polynômes de $\mathbf{R}[X]$ définie par $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

1. Calculer P_2, P_3 et P_4.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, P_n est un polynôme de degré $n-1$ à coefficient dans $\mathbf{Z}$ et dont on précisera le coefficient dominant.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction polynomiale $\widetilde{P_n}$ est de même parité que $n-1$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}$. En déduire que P_n et P_{n+1} n'ont pas de racine commune.

Factorisation

Exercice 17.29. **1.** Vérifier que $1+i$ est une racine du polynôme $P(X) = X^3 - (4+i)X^2 + (6+2i)X - (4+2i)$ et en déduire la décomposition de P dans $\mathbf{C}[X]$.

2. Vérifier que i est racine du polynôme $Q(X) = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$ et en déduire la décomposition de Q dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 17.30. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ et $\mathbf{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P_1 = X^5 - 1$;
2. $P_2 = X^4 + 4X^2 + 3$;
3. $P_3 = 2X^4 - 6X^2 + 5$;
4. $P_4 = (X^2 - X + 1)^2 + 1$;
5. $P_5 = (X^2 - 3X - 1)^2 + (4X - 5)^2$;
6. $P_6 = \sum_{k=0}^{3} (X^{2k+1} - X^{2k})$;
7. $P_7 = (2X^2 + 1)^3 + (X^2 + 2)^3$;
8. $P_8 = X^6 + 1$;
9. $P_9 = (X+1)^n - (X-1)^n$;
10. $P_{10} = X^4 - 2X^3 + X^2 - 4X + 4$;
11. $P_{11} = X^4 - 1$;
12. $P_{12} = X^5 + 1$;
13. $P_{13} = X^4 + X^2 + 1$.

Exercice 17.31. Décomposer dans $\mathbf{C}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 8(1-i)X - 12$ sachant qu'il admet une racine multiple.

Exercice 17.32. Soit n un entier naturel non nul. Posons

$$P_n = \frac{1}{2i}\left(\left(1 + \frac{iX}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{iX}{n}\right)^n\right).$$

1. Démontrer que $P_n \in \mathbf{R}[X]$.
2. Factoriser P_n dans $\mathbf{R}[X]$ pour $n = 5$ et $n = 6$.

Exercice 17.33. Introduisons la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la donnée des polynômes

$$P_0 = X \quad \text{et} \quad P_1 = 3X - 4X^3,$$

et par la relation de récurrence

$$P_{n+2} = 2(1 - 2X^2)P_{n+1} - P_n.$$

1. Déterminer, pour tout entier naturel n, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.
2. Montrer que le polynôme X divise P_n pour tout entier naturel n.
3. Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbf{R}$.
4. Prouver que pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel θ,
$$P_n(\sin(\theta)) = \sin((2n+1)\theta).$$
5. Soit $n \in \mathbf{N}$.
   (a) Pourquoi peut-on affirmer que le polynôme P_n est le seul polynôme vérifiant pour tout $\theta \in \mathbf{R}$,
   $$P_n(\sin(\theta)) = \sin((2n+1)\theta)\,?$$
   (b) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $P_n(\sin(\theta)) = 0$ d'inconnue θ réelle.
   (c) En déduire les racines de P_n dans $[-1\,;\,1]$ et factoriser P_n sur $\mathbf{R}$.

Décomposition en éléments simples

Exercice 17.34. Décomposer en éléments simples la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 24x - 17}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}.$$

Exercice 17.35. Décomposer en éléments simples la fonction

$$g : x \longmapsto \frac{x^5 + x + 4}{x^4 - 1}.$$

En déduire une primitive de g sur $]-1\,;\,1[$.