TD 16 — Calcul matriciel

Vocabulaire général

Exercice 16.1. Expliciter $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 4} \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ dans les cas suivants.

1. $\forall i,j \in [\![1,4]\!], \quad a_{ij} = \max(i,j)$;

2. $\forall i,j \in [\![1,4]\!], \quad a_{ij} = \left\lfloor \dfrac{i+j}{4} \right\rfloor$;

3. $\forall i,j \in [\![1,4]\!], \quad a_{ij} = |i-j|$;

4. $\forall i,j \in [\![1,4]\!], \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{si} \quad i < j \end{cases}$.

Exercice 16.2. Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer, lorsque cela a un sens :

$$3A \quad ; \quad A+B \quad ; \quad B+2C \quad ; \quad AB \quad ; \quad BA \quad ; \quad BC \quad ; \quad BAC.$$

Exercice 16.3. Déterminer toutes les matrices A qui vérifient :

$$A \times \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 5I_2 = \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 21 & 10 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16.4. Démontrer que toute matrice carrée se décompose de manière unique en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 16.5. Soit $(n,p) \in (\mathbf{N}^\star)^2$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ telle que $A^\top A = 0$. Montrer que $A = 0$. Ce résultat est-il encore valide pour une matrice à coefficients complexes ?

Exercice 16.6. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère les matrices $S = (s_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ et $P = (p_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ définies par

$$\forall (i,j) \in ([\![1,n]\!])^2, \quad p_{i,j} = ij \quad \text{et} \quad s_{i,j} = \begin{cases} i+j & \text{si } i \geqslant j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer le produit SP pour $n = 4$.
2. Calculer les coefficients de la matrice SP dans le cas général.

Exercice 16.7 (*Trace d'une matrice*). Soit un entier $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A l'élément de $\mathbb{K}$ défini par :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Montrer que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$ et $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Calcul de puissances

Exercice 16.8. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe deux nombres réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_2$.

2. Prouver que les suites (a_n) et (b_n) ainsi définies sont linéaires récurrentes d'ordre 2 et déterminer l'expression de leur terme général.
3. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 16.9. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer pour tout $k \in \mathbf{N}$, A^k et B^k.
2. Calculer $(A+B)^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 16.10. 1. Pour la matrice A suivante, calculer A^n, pour tout entier naturel n :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Posons $B = A + I_3$. Calculer B^n pour tout entier naturel n.

Exercice 16.11. Posons $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de la matrice A^n.

Exercice 16.12. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer A^n lorsque

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 3. $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

où a b et c sont trois nombres réels (on pourra commencer par le cas où $a = b$).

Exercice 16.13. 1. On introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1+a_n & a_n & 0 \\ a_n & 1+a_n & 0 \\ a_n & a_n & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Déterminer l'expression du terme général de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

2. Soit u, v, w les suites définies par la donnée de $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + v_n, \quad v_{n+1} = u_n + 2v_n, \quad w_{n+1} = u_n + v_n + w_n.$$

Déterminer, à l'aide de la matrice A, l'expression des termes généraux de ces trois suites.

Inversibilité

Exercice 16.14. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

1. Calculer $(A + I_3)^3$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} (sans utiliser le pivot de Gauss).

Exercice 16.15. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $A^3 = 0$.

1. La matrice A est-elle inversible ? *Indication :* vous pourrez raisonner par l'absurde.
2. On pose $B = I + A$. En exploitant la relation $A^3 = 0$, montrer que B^3 est combinaison linéaire des matrices B^2, B et I. En déduire que B est inversible.

Exercice 16.16. Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on considère la matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. Calculer $R(\alpha)R(\beta)$.

2. Démontrer que $R(\theta)$ est inversible pour tout $\theta \in \mathbf{R}$ et calculer son inverse.

3. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, et tout $\theta \in \mathbf{R}$, calculer $R(\theta)^n$ (si n est un entier négatif, on convient que $R(\theta)^n = (R(\theta)^{-1})^{-n}$).

Exercice 16.17. **1.** Soit $(a,b,c,d) \in \mathbf{K}^4$. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $A^2 - (a+d)A$.

(b) À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les scalaires a, b, c, d la matrice A est-elle inversible ? Lorsque A est inversible, exprimer A^{-1} à l'aide de a, b, c, d.

2. Supposons $ad - bc \neq 0$. Soit $(e,f) \in \mathbf{K}^2$. Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{rcl} ax+by & = & e \\ cx+dy & = & f \end{array} \right.$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Exercice 16.18. Soit $a,b,c \in \mathbf{C}$. Inverser, si possible, les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; **2.** $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; **3.** $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; **5.** $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; **6.** $F = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

7. $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; **8.** $I = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 1 & i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix}$. **9.** $J = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$.

Exercice 16.19. **1.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. On pose $D = P^{-1}MP$. Démontrer que pour tout $k \geqslant 0$, on a $M^k = PD^kP^{-1}$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer P^{-1} et calculer $D = P^{-1}MP$.

(b) Calculer M^k pour tout $k \geqslant 0$.

Exercice 16.20. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible.

2. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire une expression de A^n, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Systèmes linéaires

Exercice 16.21. Donner la matrice associée au système suivant, puis appliquer la méthode de Gauss sur ces matrices pour résoudre les systèmes.

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} -2x+y-2z & = & 0 \\ x+3y-z & = & 0 \\ -x+4y-3z & = & 0 \end{array} \right.$; **2.** $\left\{ \begin{array}{rcl} -3x+2y-2z & = & 0 \\ x+3y-z+2t & = & 0 \\ 2x+2z+2t & = & 0 \end{array} \right.$; **3.** $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & 0 \\ x+3y-z & = & 0 \\ 2x+2z & = & 0 \\ x-y+z & = & 0 \end{array} \right.$.

Exercice 16.22. Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. On admet que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ et on donne $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.
Soit a,b,c des réels réels. Sans utiliser la méthode de Gauss, montrer que le système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y-z & = & a \\ -3x+y+2z & = & b \\ 2x-y-z & = & c \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ possède une unique solution et l'exprimer en fonction de a,b,c.

Ensembles de matrices

Exercice 16.23. On considère l'ensemble

$$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}) \;\middle|\; \exists (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ M = \begin{pmatrix} -(a+b) & b & a \\ a & -(a+b) & b \\ b & a & -(a+b) \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Montrer qu'il existe deux matrices A et B telles que

$$E = \left\{ \lambda A + \mu B \,:\, (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

2. Prouver que A^2, AB, BA et B^2 appartiennent à E. En déduire que E est stable par multiplication, c'est-à-dire que pour tous $M, N \in E$, $MN \in E$.
3. Existe-t-il dans E des matrices dont l'inverse appartient encore à E ?

Exercice 16.24. On note J la matrice carrée d'ordre $n \in \mathbf{N}^\star$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Pour tout entier naturel non nul p, calculer J^p.
2. Soit $\mathcal{E} = \{I_n + \alpha J \,:\, \alpha \in \mathbf{R}\}$.
   - **(a)** Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par produit, c'est-à-dire que pour tous $A, B \in \mathcal{E}$, $AB \in \mathcal{E}$. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}$ la matrice $I_n + \alpha J$ admet-elle un inverse dans $\mathcal{E}$?
   - **(b)** En déduire l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

   - **(c)** A l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 16.25 (*Ensemble des commutants*). Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on appelle **commutant** de A et on note $\mathscr{C}(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui commutent avec A :

$$\mathscr{C}(A) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid AM = MA \}.$$

1. **Propriétés générales.** Dans cette question, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   - **(a)** Montrer que $I_n \in \mathscr{C}(A)$.
   - **(b)** Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $A^p \in \mathscr{C}(A)$.
   - **(c)** Soit $M, N \in \mathscr{C}(A)$ et λ un réel. Montrer que les matrices λM, $M + N$ et MN appartiennent au commutant de A.
   - **(d)** Soit $M \in \mathscr{C}(A)$. Montrer que si M est inversible, alors $M^{-1} \in \mathscr{C}(A)$.
2. **Un exemple.** Dans cette question, $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Le but de cette question est de montrer que

$$\mathscr{C}(A) = \{\lambda I_2 + \mu A \,:\, \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}.$$

   On note $\mathscr{E}$ l'ensemble $\mathscr{E} = \{\lambda I_2 + \mu A \,:\, \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$.
   - **(a)** A t-on $A^\top \in \mathscr{E}$?
   - **(b)** À l'aide des résultats de la question **1.** et sans faire aucun calcul de produit matriciel, justifier que $\mathscr{E} \subset \mathscr{C}(A)$.
   - **(c)** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculer les produit AM et MA. En déduire que $M \in \mathscr{C}(A)$ si et seulement si $\begin{cases} c = -4b \\ d = a + 4b \end{cases}$.
   - **(d)** Montrer que $\mathscr{C}(A) \subset \mathscr{E}$ et conclure.