TD 15 — Suites réelles et complexes

Généralités sur les suites

Exercice 15.1. Dans chacun des cas suivants, décider si la suite de terme général u_n est monotone à partir d'un certain rang.

1. $u_n = 2^n - n$;
2. $u_n = \dfrac{n}{2^n}$;
3. $u_n = \dfrac{n+1}{n-4}$;
4. $u_n = \dfrac{4^n}{n^2}$;
5. $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$;
6. $u_n = \dfrac{2n+3}{n^2}$;
7. $u_n = 2n + \dfrac{1}{5^n}$;
8. $u_n = \dfrac{3^n}{n+1}$;
9. $u_n = 3^n - n + 1$;
10. $u_n = \dfrac{2^n}{\sqrt{n}}$;
11. $u_n = 2n^2 + 3n - 8$;
12. $u_n = \dfrac{2^n\sqrt{n}}{3^n}$.

Exercice 15.2. Dans chacun des cas suivants, dire si la suite de terme général u_n est bornée ou non.

1. $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$;
2. $u_n = \dfrac{3n-2}{3n+2}$;
3. $u_n = (-1)^n$;
4. $u_n = n(-1)^n$.

Exercice 15.3. Représenter graphiquement chacune des suites définies par :

1. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 1$;
2. $v_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$.

Exercice 15.4. On considère la suite u définie par

$$u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}^\star,\ u_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{u_n}}.$$

Calculer les premiers termes de cette suite, et faire une conjecture sur l'expression du terme général de cette suite en fonction de n. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Calculs « directs » de limites

Exercice 15.5. Montrer, en revenant à la définition, que la suite u de terme général $u_n = \sqrt{\dfrac{2}{n}}$ converge vers 0, que la suite v de terme général $v_n = \dfrac{n+1}{n+3}$ converge vers 1 et que la suite w de terme général $w_n = 2^n - 3\cos(n)$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 15.6. Soit $a, b \in \mathbf{R}_+^\star$. Dans chacun des cas suivants, déterminer si elle existe la limite de la suite de terme général u_n.

1. $u_n = \dfrac{1}{n+2}$;
2. $u_n = \dfrac{n^2 - 5n}{3n^2 + 4n^3}$;
3. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;
4. $u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$;
5. $u_n = \dfrac{2^n}{n^6 + n^3 + 1}$;
6. $u_n = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{-n}}{4 + \mathrm{e}^n}$;
7. $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{2n} + 3}{(\mathrm{e}^n + 5)^2}$;
8. $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{4 \cdot 2^n - 3^{n+1}}$;
9. $u_n = \dfrac{10^{n+3}}{n + 3^{2n+1}}$;
10. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$;
11. $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$;
12. $u_n = \left(n^2 + \dfrac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{-n^2}$;

13. $u_n = 3^{1/n}$; **14.** $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$; **15.** $u_n = \frac{n!}{2^n}$;

16. $u_n = 3\sqrt{n^2+1} - 5n$; **17.** $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}$; **18.** $u_n = \frac{n - n\ln n}{n + \ln n}$;

19. $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$; **20.** $u_n = n^{1/\ln(n)}$.

Exercice 15.7. **1.** Déterminer la limite de la suite u de terme général $u_n = (1+2^n)^{\frac{1}{n}}$.

2. On veut généraliser la question précédente. Soit $(a, b) \in (\mathbf{R}_+)^2$. On considère la suite u définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \max(a, b)$.

Exercice 15.8. Déterminer si les suites dont les termes généraux sont donnés ci-après convergent, et préciser le cas échéant leur limite.

1. $u_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$; **2.** $u_n = \frac{1+3+\cdots+3^n}{3^n}$; **3.** $u_n = 1 + 2^{-1} + \cdots + 2^{-n}$.

Exercice 15.9. Soit u une suite d'entiers. On suppose que u converge. Montrer que u est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 15.10. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \cos(n)$ et $v_n = \sin(n)$.

1. Pour tout entier n, exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n, v_n, u_1 et v_1.
2. On suppose que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent respectivement vers x et y. Déterminer alors leurs limites x et y.
3. En déduire qu'elles sont toutes deux divergentes.

Exercice 15.11 (*Suite de Césaro*). Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ une suite réelle. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $v_n = \frac{1}{n}(u_1+u_2+\cdots+u_n)$.

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est monotone, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est monotone et de même monotonie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ converge vers 0 alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.
3. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ converge vers $\ell \in \mathbf{R}$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ.
4. Donner un exemple où la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ converge mais où la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ diverge.

Théorèmes d'existence d'une limite

Exercice 15.12. Dans chacun des cas suivants, déterminer si elle existe la limite de la suite de terme général u_n.

1. $u_n = n + (-1)^n\sqrt{n}$; **2.** $u_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{(n+p)^2}$; **3.** $u_n = \frac{1}{n!}\sum\limits_{k=1}^{n} k!$; **4.** $u_n = \frac{1}{n}\lfloor\sqrt{n}\rfloor$;

5. $u_n = \frac{\cos(n^3)}{n^2}$; **6.** $u_n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$; **7.** $u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$; **8.** $u_n = \frac{2+3\cos(n)}{n+1}$;

9. $u_n = n + 2\sin(n^2)$; **10.** $u_n = (\ln n)^{1/n}$; **11.** $u_n = 2n + (-1)^n n$; **12.** $u_n = \frac{1}{n}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$.

Exercice 15.13. Le but de l'exercice est de déterminer la limite de la suite u de terme général

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire un encadrement du terme $\ln(u_n)$, où $n \in \mathbf{N}^\star$.
3. Montrer que la suite de terme général $\ln(u_n)$ converge et déterminer sa limite.
4. Conclure.

Exercice 15.14. Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\exists\alpha > 0, \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} - u_n \geqslant \alpha.$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 15.15. Soient u et v deux suites de nombres réels appartenant à $[0\,;\,1]$ telles que la suite uv converge vers 1. Montrer que les suites u et v convergent également vers 1. On pourra chercher à utiliser le théorème des gendarmes après avoir encadré la suite u.

Exercice 15.16 (*Caractérisation séquentielle de la borne supérieure*).

1. Soit A une partie bornée de $\mathbf{R}$, soit M un réel. Montrer que M est la borne supérieure de A si et seulement si M est un majorant et s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A qui converge vers M.
2. On considère $A = \left\{ \dfrac{2p}{2pq+3} \;:\; (p,q) \in (\mathbf{N}^\star)^2 \right\}$. Déterminer la borne supérieure de A.

Exercice 15.17. La suite de terme général $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$ admet-elle une limite ?

Exercice 15.18. Soit u une suite réelle.

1. On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent. La suite u converge t-elle ?
2. On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers une même limite. La suite u converge t-elle ?
3. On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent. La suite u converge t-elle ?

Exercice 15.19.

1. Justifier que si une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, alors la suite $(x_{2n} - x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.
2. On introduit $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ définie pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est divergente.

Exercice 15.20. Montrer que les suites $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ et $(T_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ dont les termes généraux sont définis pour tout $n \geqslant 1$ par :

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{3n^2}$$

sont adjacentes.

Exercice 15.21.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ définies pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n(n!)}$ sont adjacentes.
2. Montrer la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est irrationnelle.

Exercice 15.22. Montrer que la suite s de terme général

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

converge. On pourra montrer que les suites extraites $(s_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 15.23. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$. Montrons de deux manières différentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

1. **Méthode 1 : avec des inégalités.**
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est strictement croissante.
   (b) Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, on a $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. En déduire une majoration de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$.
   (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est convergente et donner un encadrement simple de sa limite.

2. **Méthode 2 : avec des suites adjacentes**. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 15.24. 1. On considère la suite u définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.
   - **(a)** Déterminer le sens de variation de u.
   - **(b)** En déduire que u admet une limite. Montrer par l'absurde que u diverge vers $+\infty$.

2. On considère la suite u définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.
   - **(a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$ et en déduire le sens de variation de u.
   - **(b)** Justifier que u admet une limite et déterminer celle-ci.

3. On considère la suite u définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$. Déterminer que la suite u converge et préciser sa limite.

Exercice 15.25. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de nombres réels vérifiant, pour tout entier naturel n,

$$2u_{n+1} \leqslant u_{n+2} + u_n.$$

On introduit la suite v de terme général

$$v_n = u_{n+1} - u_n.$$

Le but de l'exercice est de montrer que la suite v converge vers 0.

1. Traduire le fait que la suite u est bornée.
2. Montrer que la suite v est majorée et croissante. Elle converge donc vers un nombre réel, que nous noterons ℓ.
3. Dans cette question, on suppose $\ell > 0$.
   - **(a)** Montrer que $v_n \geqslant 0$ au delà d'un certain rang.
   - **(b)** En déduire que la suite u est croissante au delà d'un certain rang.
   - **(c)** Que peut-on en déduire pour la suite u ?
   - **(d)** Montrer que l'on aboutit à une contradiction.
4. Dans cette question, on suppose $\ell < 0$. En suivant le même raisonnement que précédemment, montrer qu'il y a contradiction.
5. Conclure.

Suites implicites

Exercice 15.26. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur un intervalle à préciser. On notera $\widetilde{f}$ l'application bijective ainsi obtenue.
3. Établir le tableau de variations de la fonction réciproque $\widetilde{f}^{-1}$ de $\widetilde{f}$.
4. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $\widetilde{f}(x) = n$ admet une unique solution. On note u_n cette solution.
5. Étudier les variations et la limite de (u_n).

Exercice 15.27. Introduisons $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x + x$ définie sur $\mathbf{R}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution réelle. On notera x_n cette solution.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ainsi définie est monotone.
3. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite, puis déterminer celle-ci.

Exercice 15.28. On considère l'équation (E_n) : $x^n - x - 1 = 0$, où $n \geqslant 2$. On introduit, pour $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n : x \longmapsto x^n - x - 1$.

1. Montrer que pour $n \geqslant 2$, (E_n) admet une unique solution dans l'intervalle $[1\,; +\infty[$; on note x_n cette solution.
2. Soit $n \geqslant 2$.
   - **(a)** Donner le signe de la fonction $x \longmapsto f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $[1\,; +\infty[$.

(b) Rappeler la valeur de $f_n(x_n)$. En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.

(c) Rappeler la valeur de $f_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire le sens de variation de $(x_n)_{n\geqslant 2}$.

3. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

4. En remarquant que pour tout $n \geqslant 2$, $x_n = (1+x_n)^{\frac{1}{n}}$, montrer que $\ell = 1$.

Exercice 15.29. Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $\varphi_n(x) = x - \ln(x) - n$.

1. Soit $x \in]0\,;+\infty[$ fixé. Montrer que la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

2. Soit $n \geqslant 2$ fixé. Montrer que l'équation $\varphi_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions notées x_n et y_n telles que $x_n \in]0\,;1[$ et $y_n \in]1\,;+\infty[$.

3. En utilisant la question **1.** et le sens de variation de φ_{n+1}, comparer $\varphi_{n+1}(x_n)$ et $\varphi_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

4. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0.

Exercice 15.30. **1.** Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'équation $x^n = nx - 1$ admet une unique solution sur $[0\,;1]$, que l'on notera u_n.

2. Soit (v_n) une suite décroissante d'éléments de $[0\,;1[$ qui converge. Montrer que (v_n^n) converge vers 0.

3. Prouver que la suite u ainsi définie est monotone et déterminer la valeur de sa limite.

Suites complexes

Exercice 15.31. Soit u la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = iu_n + 2i.$$

Déterminer le terme général de u et, si elle existe, sa limite.

Exercice 15.32. Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = a + ib$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}(3u_n + 2\overline{u_n})$. Cette suite est-elle convergente, et si oui, quelle est sa limite ?

Exercice 15.33. On considère les suites réelles (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{3}y_n \qquad \text{et} \qquad y_{n+1} = -\frac{1}{3}x_n + \frac{1}{2}y_n.$$

Montrer que la suite (z_n) définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $z_n = x_n + iy_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

En déduire la convergence de (x_n) et (y_n).

Exercice 15.34. Déterminer, si elles existent, les limites des suites de terme général :

1. $z_n = \mathrm{e}^{-n} + \dfrac{n+1}{n+\sqrt{n}} + i\sqrt{\dfrac{4n^2+5}{2n^2-n}}$;

2. $z_n = \left(\dfrac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^n$;

3. $z_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{in\pi/3}$;

4. $z_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}\mathrm{e}^{in\pi/3}$;

5. $z_n = (n+1)\,\mathrm{e}^{i\left(2+\frac{1}{n}\right)}$;

6. $z_n = \left(1+\dfrac{i\pi}{n}\right)^n$.

Exercice 15.35. On considère la suite z de nombres complexes définie par la donnée de $z_0 \in \mathbf{C}$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad z_{n+1} = 2z_n - \overline{z_n}.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z_0 pour que la suite z converge.

Exercice 15.36. On définit la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $z_0 \in \mathbf{C}$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|).$$

1. Étudier cette suite lorsque z_0 est un réel négatif

2. Étudier cette suite lorsque z_0 est un réel positif

3. Montrer que si z_0 est un nombre complexe non réel, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, z_n est un nombre complexe non réel.
4. On suppose désormais que z_0 est un complexe non réel. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, où $r_n \in]0\,;+\infty[$ et $\theta_n \in]-\pi\,;\pi] \setminus \{0\}$.
   (a) Montrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique. Préciser sa raison et exprimer son terme général en fonction de n et θ_0.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $r_n = r_0 \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$
   (c) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $w_n = 2^n r_n \sin\left(\dfrac{\theta_0}{2^n}\right)$. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante. En déduire l'expression de r_n en fonction de n.
   (d) Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers le réel $r_0 \dfrac{\sin\theta_0}{\theta_0}$.

Suites usuelles

Exercice 15.37. Déterminer le terme général de la suite réelle u définie par :

1. $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$.
2. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} - 1$.
3. $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.
4. $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = -u_n + 4$.
5. $u_0 = 3$, $u_1 = 4$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$.
6. $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
7. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
8. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.
9. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$.
10. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.
11. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$. Montrer qu'on peut écrire le terme général sous la forme $u_n = A\cos(n\theta + \phi)$, où A, θ et ϕ sont des réels à préciser. Montrer que u est périodique de période 3.
12. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
13. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$.
14. $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} - 4u_n$.
15. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = -\dfrac{1}{4}u_n$.

Exercice 15.38. 1. Déterminer le terme général des suites définies par :
   (a) $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$.
   (b) $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = 4v_n^3$.
   (c) $w_0 = 0$, $w_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $w_{n+2} = 6w_{n+1} - 9w_n$.
   (d) $r_0 = 2$, $r_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $r_{n+2} = 6r_{n+1} - 8r_n + 2$.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$ et $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} r_k$.

Exercice 15.39. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par leurs premiers termes $u_0 \in \mathbf{R}$ et $v_0 \in \mathbf{R}$ et les relations :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n + 3u_n) \end{cases}$$

1. Donner l'expression des termes généraux de $(u_n - v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. En déduire l'expression des termes généraux u_n et v_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 15.40. On note E l'ensemble des suites réelles u vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n + 9n^2.$$

1. Montrer que E contient une suite de la forme $(an^2 + bn + c)_{n \in \mathbf{N}}$, avec $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.
2. En déduire l'expression du terme général d'une suite d'éléments de E.
3. Montrer qu'il existe une unique suite u dans E vérifiant $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, et donner l'expression de son terme général.