TD 14 Arithmétique dans l'ensemble des entiers

Divisibilité

Exercice 14.1. **1.** Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $n^3 - n$ est divisible par 6.

2. Montrer que la somme des cubes de trois entiers naturels consécutifs est divisible par 9.

Exercice 14.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, n^2 divise $(n+1)^n - 1$.

Exercice 14.3. Soit n un entier naturel.

1. Montrer que pour tout entiers naturels a, b et p, si $a \equiv b\ [p]$, alors $a^n \equiv b^n\ [p]$.

2. Montrer que le nombre $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 14.4. **1.** Montrer que pour tout entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 10^n par 9 est égal à 1. En déduire le critère de divisibilité par 9 : un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

2. Démontrer le critère de divisibilité par 11 : un entier est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres est divisible par 11 (la somme alternée de 123 456 est $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$).

Exercice 14.5. Résoudre dans $\mathbf{Z}^2$ les équations suivantes.

1. $(E_1) : \ xy = 2x + 3y$; **2.** $(E_2) : \ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$; **3.** $(E_3) : \ x^2 - y^2 - 4x - 2y = 5$.

Division euclidienne

Exercice 14.6. Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a, b) avec $a < 4000$ tels que que la division euclidienne de a par b donne un quotient de 82 et un reste de 47.

Exercice 14.7. On divise deux entiers naturels distincts a et b avec $a > b$ par leur différence $a - b$. Comparer les quotients et les restes obtenus.

Exercice 14.8. Soit $a \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{N}^\star$, on note q le quotient de la division euclidienne de $(a-1)$ par b et r son reste. Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer le quotient de la division euclidienne de $(ab^n - 1)$ par b^{n+1}.

Nombres premiers

Exercice 14.9. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N} \backslash \{1\}$, l'entier $5^n - 3^n$ n'est pas un nombre premier.

Exercice 14.10. Soit a et b deux entiers naturels de même parité. Montrer que $\dfrac{a^3 + b^3}{2}$ est un entier naturel non premier.

Exercice 14.11. Soit n un entier naturel non nul et q un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que si q divise n, alors q ne divise pas $n + 1$. En utilisant ce résultat, montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 14.12. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer qu'aucun des entiers

$$n! + 2, \quad n! + 3, \quad \cdots \quad n! + n$$

n'est premier. Que peut-on en déduire ?

Exercice 14.13 (*Nombres de Mersenne*). **1.** Soit p et q deux entiers naturels. Montrer que $(2^p - 1) \mid (2^{pq} - 1)$.

2. En déduire que pour tout entier naturel, si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

3. La réciproque est-elle vraie ? (on pourra tester les entiers premiers inférieurs à 13 ; exceptionnellement, vous pouvez vous aider d'un ordinateur !).

Exercice 14.14 (*Petit théorème de Fermat*). Soit p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.

2. En déduire que pour tout entier a, $a^p - a$ est un multiple de p. On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.

Plus grand comme diviseur, plus petit commun multiple

Exercice 14.15. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que les fractions $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ et $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ sont irréductibles.

Exercice 14.16. On divise 2003 par n, le reste est égal à 8. On divise 3002 par n, le reste obtenu est 27. Que vaut n ?

Exercice 14.17. **1.** Déterminer les entiers naturels vérifiant $\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{PGCD}(x,y) & = & 3 \\ x+y & = & 21 \end{array}\right.$.

2. Déterminer les entiers naturels vérifiant $\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{PGCD}(x,y) & = & 6 \\ \mathrm{PPCM}(x,y) & = & 72 \end{array}\right.$.

Exercice 14.18. Soit $a \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{N}^\star$. On note r et q respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de a par b.

1. Montrer que $2^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $2^a - 1$ par $2^b - 1$.

2. En déduire que $\mathrm{PGCD}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\mathrm{PGCD}(a,b)} - 1$

Exercice 14.19 (*Nombres parfaits*). Soit a et p deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On suppose que $M = a^p - 1$ est un nombre premier.

1. Montrer que $a = 2$.

2. Montrer que p est premier. Vous pouvez utiliser l'Exercice 14.18.

3. Un nombre n est dit **parfait** si la somme de ses diviseurs est égale à son double. Montrer que $2^{p-1}M$ est un nombre parfait.