TD 13 L'ensemble des nombres réels

Majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure

Exercice 13.1. Montrer que l'ensemble E suivant est borné et en donner un majorant et un minorant.

$$E = \left\{ \sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n^2+1} \ : \ n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Exercice 13.2. Calculer les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \ : \ n \in \mathbf{N}^\star \right\}.$$

Exercice 13.3. Pour chacun des ensembles suivants, décider s'ils sont majorés ou minorés et, le cas échéant, trouver leur borne supérieure ou inférieure.

1. $A = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \ : \ (n,m) \in (\mathbf{N}^\star)^2 \right\}$;
2. $B = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \ : \ n \in \mathbf{N}^\star \right\}$;
3. $C = \left\{ \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \ : \ x \in \mathbf{R}_+^\star \right\}$;
4. $D = \left\{ \frac{x^2-3x+6}{x-2} \ : \ x \in]3\,;\,6[\right\}$;
5. $E = [\sqrt{2}\,;\,\sqrt{3}] \cap \mathbf{Q}$.

Exercice 13.4.

1. Soit m et n deux entiers naturels non nuls. Montrer que :
$$\frac{mn}{(m+n)^2} \leqslant \frac{1}{4}.$$
2. Montrer que l'ensemble
$$A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2} \ : \ (m,n) \in \mathbf{N}^2 \right\}$$
est majoré et minoré, puis déterminer ses bornes inférieure et supérieure.

Exercice 13.5.

1. Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$ et α un nombre réel tel que pour tout $x \in A$, $x \leqslant \alpha$.
   - **(a)** Justifier que A possède une borne supérieure finie et que $\sup A \leqslant \alpha$.
   - **(b)** On suppose que pour tout $x \in A$, $x < \alpha$. A t-on $\sup(A) < \alpha$?
2. Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbf{R}$.
   - **(a)** Montrer que si $A \subset B$, alors $\sup A \leqslant \sup B$.
   - **(b)** Montrer que $A \cup B$ est majorée. Justifier que la borne supérieure de $A \cup B$ existe, est finie, et la déterminer.

Exercice 13.6. Soit A et B deux parties non vides de $\mathbf{R}$ telles que pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$, $x \leqslant y$.
Justifier l'existence et la finitude de la borne supérieure de A et de la borne inférieure de B et démontrer : $\sup A \leqslant \inf B$.

Exercice 13.7. Pour toutes parties A et B de $\mathbf{R}$, on introduit l'ensemble

$$A + B = \{a + b \ : \ (a,b) \in A \times B\}$$

1. Déterminer $A+B$ lorsque $A = [0\,;\,1]$ et $B = [0\,;\,1]$.
2. Déterminer $A+B$ lorsque $A =]0\,;\,1]$ et $B = [0\,;\,1[$.
3. Soit A et B deux parties de $\mathbf{R}$ non vides et majorées. Montrer que $A+B$ est une partie non vide majorée de $\mathbf{R}$, puis comparer $\sup(A+B)$ et $\sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 13.8. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbf{R}$. On pose

$$B = \left\{|x-y| \;:\; (x,y) \in A^2\right\}.$$

Montrer que B admet une borne supérieure finie et prouver que $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 13.9. Soit $f : [0\,;\,1] \longrightarrow [0\,;\,1]$ une fonction croissante. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $x_0 \in [0\,;\,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$ (on dit que x_0 est un **point fixe** de f).
Posons $A = \{\, x \in [0\,;\,1] \mid f(x) \geqslant x \}$.

1. Justifier l'existence de la borne supérieure de l'ensemble A. On note a cet élément. Montrer que $a \in [0\,;\,1]$.
2. Montrer que $f(A) \subset A$.
3. Montrer que $f(a)$ majore A.
4. En déduire que a est un point fixe de f.
5. Le résultat subsiste-t-il si l'on suppose que f est une fonction croissante de $[0\,;\,1[$ dans $[0\,;\,1[$?

Retour sur la partie entière

Exercice 13.10. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Exercice 13.11. Montrer que pour tout nombre réel x, $\left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.