TD 12 Ensembles et applications

Ensembles

Exercice 12.1. Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Parmi les assertions suivantes, lesquelles n'ont pas de sens ? Lesquelles sont vraies ?

(a) $a \in E$; **(b)** $a \subset E$; **(c)** $a \in \mathcal{P}(E)$; **(d)** $a \subset \mathcal{P}(E)$;
(e) $\{a\} \in E$; **(f)** $\{a\} \subset E$; **(g)** $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$; **(h)** $\{a\} \subset \mathcal{P}(E)$;
(i) $\varnothing \in E$; **(j)** $\varnothing \subset E$; **(k)** $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$; **(l)** $\varnothing \subset \mathcal{P}(E)$;
(m) $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(E)$; **(n)** $\{\varnothing\} \subset \mathcal{P}(E)$; **(o)** $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

Exercice 12.2. Introduisons les ensembles :

$$A = \{2k \ : \ k \in \mathbf{Z}\}, \quad B = \{n \in \mathbf{N} \mid n \equiv 0 \ [2]\}, \quad C = \varnothing, \quad D = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x^3 = 4x\right\}, \quad E = \left\{n \in \mathbf{Z} \mid \mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{2}} = 1\right\}.$$

Énoncer toutes les relations d'inclusion existant entre ces différents ensembles.

Exercice 12.3. Montrer les égalités ou les inclusions d'ensembles suivantes :

1. $\{z \in \mathbf{C} \mid |z-1| = |z+1|\} = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(z) = 0\}$;
2. $\mathbf{R}_- = \{x \in \mathbf{R} \mid \forall y \in \mathbf{R}_+,\ x \leqslant y\}$;
3. $\left\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 = 4x - 2\right\} \subset \mathbf{R}_+$;
4. $\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \exists t \in \mathbf{R}_+^\star,\ x = \ln(t) \text{ et } y = t - 1\right\} \subset \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leqslant y\right\}$;
5. $\{(1+2t, 2-t, -1+3t) \ : \ t \in \mathbf{R}\} \subset \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + y - z = 5\right\}$;
6. $\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x - y = 1\right\} = \{(t+1, 4t+3) \ : \ t \in \mathbf{R}\}$.

Exercice 12.4. On considère

$$E = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-t} \end{array} \ : \ (A,B) \in \mathbf{R}^2 \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & A\,\mathrm{ch}(t) + B\,\mathrm{sh}(t) \end{array} \ : \ (A,B) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Montrer par double inclusion que ces deux ensembles sont égaux.

Exercice 12.5. Pour chaque question, montrer que les ensembles E et F sont égaux.

1. $E = \left\{x \longmapsto A\cos(x) + B\sin(x) \ : \ (A,B) \in \mathbf{R}^2\right\}$ et $F = \left\{x \longmapsto A\cos(-x) + B\sin(-x) \ : \ (A,B) \in \mathbf{R}^2\right\}$.
2. $E = \left\{x \longmapsto A\cos(x) + B\sin(x) \ : \ (A,B) \in \mathbf{R}^2\right\}$ et $F = \left\{x \longmapsto A\cos(x + B) \ : \ (A,B) \in \mathbf{R}^2\right\}$.

Exercice 12.6.

1. Montrer que l'ensemble $E = \left\{z \in \mathbf{C} \mid \overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z}-1)\right\}$ est inclus dans l'ensemble $F = \{0\} \cup \mathbf{U}$.
2. Soit $z \in \mathbf{U}$. Posons θ l'argument de z appartenant à $]-\pi\,;\,\pi]$. Montrer que $z \in E$ si et seulement si $\theta \in \left\{-\dfrac{\pi}{2}, 0, \dfrac{\pi}{2}\right\}$.
3. Déterminer en extension l'ensemble E.

Exercice 12.7. Prouver que : $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + k\pi\,;\,\frac{3\pi}{4} + k\pi\right[= \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \ : \ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Exercice 12.8. Déterminer les ensembles suivants sous forme d'intervalle (on démontrera bien sûr les conjectures faites).

1. $\displaystyle A = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} [0\,;\,k]$;
2. $\displaystyle B = \bigcap_{k\in\mathbf{N}^\star} \left[0\,;\,\frac{1}{k}\right]$;
3. $\displaystyle C = \bigcup_{k\in\mathbf{N}^\star} \left]0\,;\,\frac{1}{k}\right]$.

Exercice 12.9. Prouver que : $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\left]-\frac{\pi}{4}+k\pi\,;\,\frac{3\pi}{4}+k\pi\right[=\mathbf{R}\backslash\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi\ :\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

Exercice 12.10. Soit $n\geqslant 3$ un entier. On considère un jeu de 32 cartes et on tire n cartes avec remise. On note, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, R_k l'ensemble des tirages où on obtient un roi au k-ième tirage.
Écrire les ensembles suivants uniquement avec $R_1,\dots,R_n$ (on pourra ne pas utiliser tous ces ensembles ; on pourra utiliser des unions, des intersections, des complémentaires...). Soit $j\in[\![1,n]\!]$.

1. A : l'ensemble des tirages où on obtient des rois aux trois premiers tirages.
2. B_j : l'ensemble des tirages où on obtient des rois aux j premiers tirages.
3. C : l'ensemble des tirages où on n'obtient que des rois.
4. D : l'ensemble des tirages où on n'obtient aucun roi.
5. E : l'ensemble des tirages où le premier roi obtenu arrive au deuxième tirage.
6. F_j : l'ensemble des tirages où le premier roi arrive au j-ième tirage.
7. G : l'ensemble des tirages où on a obtenu au moins un roi.

Exercice 12.11. On lance indéfiniment un dé et on note E l'ensemble des tirages possibles. Pour tout entier $k\geqslant 1$, on note A_k l'ensemble des tirages où le dé tombe sur 6 au k-ième tirage.
On note, pour tout $k\in\mathbf{N}^\star$, B_k l'ensemble des tirages où le dé tombe pour la première fois sur 6 au k-ième tirage. On note B_∞ l'ensemble des tirages où le dé ne tombe jamais sur 6.

1. Justifier que $\{A_1,A_2,\dots\}=\{A_j\}_{j\in\mathbf{N}^\star}$ n'est pas une partition de E.
2. Justifier que $\{B_j\}_{j\in\mathbf{N}^\star}$ n'est pas une partition de E.
3. Montrer que $\{B_j\}_{j\in\mathbf{N}^\star}\cup\{B_\infty\}$ est une partition de E.

Exercice 12.12. Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$.

Exercice 12.13.
1. Décrire les ensembles $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ et $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$.
2. Conjecturer le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{P}([\![1,n]\!])$ pour un entier naturel n fixé.

Exercice 12.14. Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des applications f définies sur $\mathbf{N}$ à valeurs dans $\mathbf{N}$ vérifiant pour tout $(n,m)\in\mathbf{N}^2$,
$$f(n+m)=f(n)f(m).$$

1. Soit $f\in\mathcal{E}$.
   (a) Montrer que $f(0)\in\{0,1\}$.
   (b) Supposons $f(0)=0$. Montrer que $f=0$.
   (c) Supposons $f(0)=1$. Posons $a=f(1)$. Montrer que $f(n)=a^n$ pour tout $n\in\mathbf{N}$.
   (d) Quelle inclusion d'ensemble a-t-on établie ?
2. Conclure.

Exercice 12.15. Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1. Montrer que $A\subset B$ si et seulement si $A\cup B=B$
2. Montrer que si $A\cup B=B\cap C$, alors $A\subset B\subset C$.

Applications

Exercice 12.16. L'application $x\longmapsto 2x$ est-elle injective, surjective, bijective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$? Est-elle injective, surjective, bijective de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$?

Exercice 12.17. On considère l'application $f:\begin{array}{ccc}\mathbf{C}&\longrightarrow&\mathbf{C}\\ z&\longmapsto&\mathrm{e}^z\end{array}$.

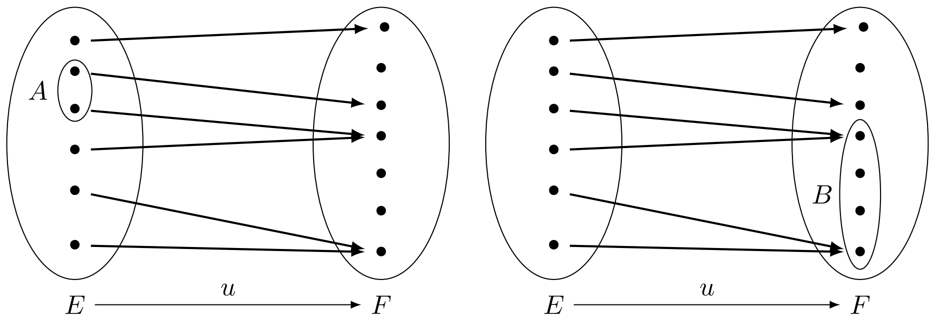
1. L'application f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer et représenter dans le plan de Cauchy l'image réciproque de $\mathbf{U}$ par f.
3. Déterminer et représenter dans le plan de Cauchy l'image directe de l'ensemble $A=\left\{x+i\dfrac{\pi}{4}\ :\ x\in\mathbf{R}\right\}$ par f.

Exercice 12.18. L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{N}^2 & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ (n,m) & \longmapsto & n+m \end{array}$ est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 12.19. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rl} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -(n+1)/2 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$.

1. Justifier que f est bien définie (ce qui signifie que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \in \mathbf{Z}$ ici).
2. Montrer que f est bijective.

Exercice 12.20. On considère l'application u de l'ensemble E dans l'ensemble F, une partie A de E et une partie B de F. Déterminer les ensembles $u(A)$, $u^{-1}(B)$, $u^{-1}(u(A))$ et $u(u^{-1}(B))$.



Exercice 12.21. On considère $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & 2n+1 \end{array}$, ainsi que $A = [\![0, 10]\!]$, B l'ensemble des entiers pairs, C l'ensemble des entiers impairs, $D = \{0, 1, 2\}$ et $E = \{4k+1 \,:\, k \in \mathbf{N}\}$.

1. Déterminer l'image directe par f des ensembles A, D et $\mathbf{N}$.
2. Déterminer l'image réciproque par f des ensembles D, E et $\mathbf{N}$.
3. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 12.22. On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rll} (n/2)^2 & \text{si} & n \text{ est pair} \\ (n-1)/2 & \text{si} & n \text{ est impair} \end{array} \right. \end{array}$, ainsi que $A = [\![0, 9]\!]$, B l'ensemble des entiers pairs, C l'ensemble des entiers impairs, $D = \{0, 1, 2\}$ et E l'ensemble des carrés parfaits.

1. Déterminer l'image par f des ensembles A, B et C.
2. Déterminer l'image réciproque par f des ensembles D, E et $\mathbf{N}$.
3. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 12.23. On introduit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2+4x+1 \end{array}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[-2\,;+\infty[$ sur son image et déterminer l'application réciproque associée.
2. Déterminer $f([-3\,;0])$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{-4\})$ et $f^{-1}([0\,;1[)$.

Exercice 12.24. On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{C}\backslash\{1\} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{\bar{z}+1}{z-1} \end{array}$.

1. Montrer que pour tout $\mathbf{C}\backslash\{1\}$, $f(z) \neq 1$.
2. Déterminer l'ensemble $f(i\mathbf{R})$.
3. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 12.25. On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$.

1. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.
3. Déterminer $f(]0\,;1])$.

Exercice 12.26. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Lorsque celle-ci existe, déterminer l'application réciproque.

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} [-1\,;1] & \longrightarrow & [-1\,;1] \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{x^2+1} \end{array}$;
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y+z, x+2z) \end{array}$;
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y+2z, x+2z, x+y-z) \end{array}$;
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, 2x+y, x+y) \end{array}$;
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbf{C}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbf{U} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z}{|z|} \end{array}$;
6. $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbf{C}\backslash\{2i\} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z+1}{z-2i} \end{array}$.

Exercice 12.27. Soit $w \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{U}$. On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{U} & \longrightarrow & \mathbf{U} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z+w}{1+\bar{w}z} \end{array}$.

1. Montrer que f est bien définie, c'est-à-dire que pour tout $z \in \mathbf{U}$, l'expression $f(z)$ est correctement définie et appartient à $\mathbf{U}$.
2. Montrer que f est bijective, et déterminer son application réciproque.

Exercice 12.28. Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est injective, surjective et donner, si possible, une description de son image par équations.

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 3x+4y \end{array}$;
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+2z, x+y+z, 2x+2y+z, 3x+3y+3z) \end{array}$;
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^4 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+y+t, x+y+2t, x+z) \end{array}$;
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x+y-z, x-y, x-y) \end{array}$.

Exercice 12.29.
1. Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$ est bijective. Déterminer son application réciproque.
2. Déterminer l'image réciproque par f de $E = \left\{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; u = v\right\}$.

Exercice 12.30. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.

1. Justifier que $f^{-1}(F) = E$.
2. A-t-on nécessairement $f(E) = F$? Si oui, le démontrer. Si non, quelle propriété doit vérifier f pour que cette égalité soit vraie ?

Exercice 12.31. Soit E et F deux ensembles, f une application de E dans F.

1. Soit A, B deux parties de E. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Que dire de l'assertion $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?
2. Soit A, B deux parties de F. Montrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Que dire de l'assertion $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$?

Exercice 12.32. Soit E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G et h une application de G dans E. Montrer que :

1. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
2. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective ;
3. si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective ;
4. si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective ;
5. si $h \circ g \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors f est injective et h est surjective.

Exercice 12.33. Soit A une partie d'un ensemble E, B une partie d'un ensemble F et f une application de E dans F.

1. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ et donner un exemple pour lequel $A \neq f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que si f est injective alors $A = f^{-1}(f(A))$.
3. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et donner un exemple pour lequel $f(f^{-1}(B)) \neq B$.
4. Montrer que si f est surjective alors $f(f^{-1}(B)) = B$