

TD 11

ÉQUATIONS
DIFFÉRENTIELLES
LINÉAIRES

Premier ordre

Exercice 11.1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbf{R}$.

1. $(E_1) : y' - 3y = 2;$
2. $(E_2) : y' - 3t^2y = t^2;$
3. $(E_3) : y' + ty = t^3;$
4. $(E_4) : y' + 2y = e^{2t};$
5. $(E_5) : y' - 5y = e^{5t};$
6. $(E_6) : y' - y = \sin t.$

Exercice 11.2. Trouver les solutions des équations différentielles suivantes sur les intervalles I indiqués.

1. $(E_1) : y' - 3y = e^{2x}$ sur $I = \mathbf{R};$
2. $(E_2) : xy' + 2y = 0$ sur $I = \mathbf{R}_+^* ;$
3. $(E_3) : \sqrt{1-x^2}y' - y = 1$ sur $I =]-1; 1[;$
4. $(E_4) : (x^2 - 1)y' - xy = 1 + x - x^2$ sur $I =]-1; 1[;$
5. $(E_5) : y' - y \tan x = \frac{1}{\cos(x)^3}$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[;$
6. $(E_6) : y'x \ln x - y = 3 \ln x$ sur $I =]0; 1[;$
7. $(E_7) : y' - 2y = \operatorname{sh}(x)$ sur $I = \mathbf{R};$
8. $(E_8) : (x^2 - 1)y' + xy = x$ sur $I =]1; +\infty[;$
9. $(E_9) : y' + y \tan x = \sin x$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[;$
10. $(E_{10}) : (1 + x^2)y' + 2xy = 1$ sur $I = \mathbf{R}.$

Exercice 11.3. On considère la fonction $f : t \mapsto \ln \left(\sqrt{\frac{1+t^2}{1-t^2}} \right).$

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $] -1; 1[$. Expliciter $f'(t)$ pour tout $t \in] -1; 1[$.
2. Soit l'équation différentielle d'inconnue x

$$(E) : x' - \frac{x}{t-1} = \frac{2t}{1+t+t^2+t^3}.$$

- (a) Résoudre (E) sur $] -1; 1[$.
- (b) Déterminer la solution g de (E) sur $] -1; 1[$ telle que $g(0) = 1$.

Exercice 11.4. 1. Déterminer une primitive sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ de $f : t \mapsto \frac{1}{\cos(t)}$. On pourra faire le changement de variable $u = \sin(t)$.

2. En déduire l'unique solution sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ du problème de Cauchy :

$$y' - y \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad y(0) = 1.$$

Exercice 11.5. Déterminer une fonction à valeurs strictement positives solution sur $\mathbf{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$(E) : xy' + y = -y^2 \ln(x).$$

On pourra commencer par faire une analyse et poser $u = \frac{1}{y}$.

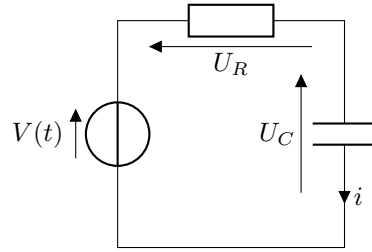
Exercice 11.6. On emprunte un capital $S > 0$ sur une durée $T > 0$, au taux d'intérêt $\tau > 0$. Le remboursement est linéaire, progressif ou dégressif, c'est à dire que le remboursement par unité de temps est de la forme $\rho(t) = at + R$ avec $a \in \mathbf{R}$ et $R > 0$.

1. En supposant l'unité de temps petite devant T , montrer que le capital restant dû à l'instant t (que l'on notera $y(t)$) vérifie l'équation différentielle

$$y' - \tau y + \rho = 0.$$

2. Résoudre cette équation et trouver la relation qui lie R et a . Déterminer la valeur de R pour que les remboursements par unité de temps soient constants.

Exercice 11.7. Un circuit électrique se compose en série d'un condensateur de capacité C et d'une résistance R , alimentés par un générateur de force électromotrice V . On note $Q(t)$ la charge du condensateur et $I(t)$ l'intensité du courant au cours du temps t .



1. Montrer que $t \mapsto Q(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V$$

et résoudre celle-ci sachant que la charge initiale du condensateur est nulle et V est constante.

2. Montrer que $t \mapsto I(t)$ vérifie l'équation

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dV}{dt}$$

et calculer $I(t)$ sachant qu'à l'instant $t = 0$ l'intensité du courant vaut I_0 et que $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$.

Second ordre

Exercice 11.8. Résoudre sur $\mathbf{R}$ les équations différentielles suivantes.

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1. $(E_1) : y'' - 5y' + 6y = 0;$ | 2. $(E_2) : y'' - 3y' = 0;$ |
| 3. $(E_3) : y'' + 4y' + 4y = 0;$ | 4. $(E_4) : y'' - 2y' + 2y = 0.$ |

Exercice 11.9. Trouver les solutions des équations différentielles suivantes sur $\mathbf{R}$.

- | | |
|--|--|
| 1. $(E_1) : y'' - 3y' - 18y = e^{4x};$ | 2. $(E_2) : y'' + 2y' - 8y = e^{2x};$ |
| 3. $(E_3) : y'' - 10y' + 41y = \sin(x);$ | 4. $(E_4) : y'' + 4y = e^{2x} \cos(x);$ |
| 5. $(E_5) : y'' - 2y' + 5y = \cos(2x);$ | 6. $(E_6) : y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x} + 1;$ |
| 7. $(E_7) : y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x) + 3;$ | 8. $(E_8) : y'' - y = \operatorname{sh}(x).$ |

Exercice 11.10. Déterminer une équation différentielle linéaire du second degré ayant pour ensemble de solutions :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto (A \cos(x) + B \sin(x))e^{-5x} + 3 \end{array} : (A, B) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Exercice 11.11. 1. Montrer que l'équation différentielle $y'' + y = 3x^2$ admet une solution de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.

2. En déduire l'unique solution du problème de Cauchy

$$y'' + y = 3x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Exercice 11.12. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : (1 + e^x)^2 y'' - 2e^x(1 + e^x)y' - (3e^x + 1)y = 0.$$

Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ deux fois dérivable. On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{1 + e^x}$.

- Après avoir justifié rapidement que g est deux fois dérivable, exprimer pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ puis $(1 + e^x)^2 f''(x) - 2e^x(1 + e^x)f'(x) - (3e^x + 1)f(x)$ en fonction de $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$.
- Montrer que f est une solution de (E) si, et seulement si g est une solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants que l'on note (F) .
- Résoudre (F) puis (E) .

Exercice 11.13. Le but de cet exercice est la résolution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle

$$(t^2 + 1)y'' + ty' - y = t + \sqrt{t^2 + 1}. \quad (E)$$

1. Démontrer que pour tous nombres réels x et t ,

$$\operatorname{sh}(x) = t \iff x = \ln \left(t + \sqrt{t^2 + 1} \right).$$

2. Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, deux fois dérivable. On introduit la fonction :

$$\begin{aligned} z : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto f(\operatorname{sh}(x)) \end{aligned}$$

(a) Montrer que z est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$ et exprimer z' et z'' à l'aide de f' et f'' .

(b) Soit $t \in \mathbf{R}$. Posons $t = \operatorname{sh}(x)$. Montrer que

$$(t^2 + 1)f''(t) + tf'(t) - f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1} \iff z''(x) - z(x) = e^x.$$

3. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $z'' - z = e^x$.

4. Conclure.

Exercice 11.14. 1. Résoudre l'équation différentielle

$$x^2 y'' + 3xy' + y = (x + 1)^2$$

sur $\mathbf{R}_+^*$ en effectuant le changement de variable $t = \ln x$.

2. Résoudre l'équation différentielle

$$(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + 4y = 0$$

sur $\mathbf{R}$ en effectuant le changement de variable $t = \operatorname{Arctan}(x)$.

Exercice 11.15. Soit (E) l'équation $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0$.

- Montrer que si (E) admet une solution polynomiale de degré 2, alors elle est nécessairement de degré deux.
- Trouver une solution polynomiale non nulle p de (E) .
- Justifier qu'une fonction y deux fois dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ peut s'écrire sous la forme $y = p \times z$, où z est une fonction deux fois dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
- Montrer qu'une fonction $y : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fois dérivable est solution de (E) si et seulement si la fonction $Z = z'$ (où z est définie comme à la question précédente) est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre un (E') à préciser.
- Résoudre (E) .

Exercice 11.16 (Oscillation d'un ressort). Nous allons décrire le mouvement d'une masse m fixée à l'extrémité d'un ressort (en position verticale) de raideur k qu'on étire d'une longueur y_0 et qu'on lâche. On repère la position de la masse par son ordonnée $y(t)$ sur un axe vertical orienté vers le haut et dont l'origine est la position d'équilibre du ressort avec la masse à son extrémité.

1. On suppose dans cette question qu'il n'y a pas de force de frottement. Montrer que $y(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$my'' + ky = 0$$

et la résoudre. À quel type de mouvement a-t-on affaire ?

2. On suppose maintenant que la masse est plongée dans un liquide qui provoque une force de frottement opposée au mouvement et proportionnelle à la vitesse, valant $-cy'$. Montrer que l'équation différentielle régissant le mouvement de la masse est

$$my'' + cy' + ky = 0$$

et la résoudre en distinguant trois cas selon la valeur de $c^2 - 4km$. À quel type de mouvement a-t-on affaire dans chacun des cas ?

Exercice 11.17 (Oscillations forcées ou pourquoi interdit-on de défiler au pas sur un pont). Un bloc de masse m , attaché à un ressort de raideur k , est soumis à une force extérieure $\vec{F}$ s'exerçant dans l'axe du ressort et dont l'intensité au temps t est donnée par $F(t) = F \sin(\alpha t)$ où F et α sont des nombres réels positifs.

1. Justifier que le déplacement $y(t)$ du bloc au temps t satisfait l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = \frac{F}{m} \sin(\alpha t)$$

où ω est une constante strictement positive que l'on exprimera en fonction des données.

2. Résoudre l'équation différentielle. Que se passe-t-il si la valeur de α est proche de ω ?

Exercice 11.18. Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbf{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) + f'(-x) = \sin(2x).$$

On pourra raisonner par analyse-synthèse en commençant par montrer que de telles applications sont deux fois dérivables sur $\mathbf{R}$.

Exercice 11.19. Soit $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Le but de cet exercice est de trouver les solutions définies sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ de l'équation différentielle :

$$y'' + y = f$$

vérifiant $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right)$. On introduit pour cela la fonction

$$\begin{aligned} F : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto -\cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t) \, dt + \sin(x) \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t) \cos(t) \, dt \end{aligned}$$

Montrer que F est deux fois dérivable. Exprimer $F + F''$ en fonction de f , puis conclure.

Exercice 11.20. Déterminer les applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) \, dt = 1.$$