TD 10 — Primitives et intégrales

Calcul de primitives « simples »

Exercice 10.1. Calculez une primitive des fonctions suivantes sur les intervalles indiqués.

Cet exercice ne nécessite ni intégration par parties, ni changement de variable.

1. $f_1 : t \longmapsto 2t^2 + 3t + 1$ sur $\mathbf{R}$;

2. $f_2 : t \longmapsto (t+1)\sqrt{t}$ sur $]0\,;\,+\infty[$;

3. $f_3 : t \longmapsto \dfrac{(1+t)^2}{\sqrt{t}}$ sur $]0\,;\,+\infty[$;

4. $f_4 : t \longmapsto \sin(t)\exp(\cos(t) + 1/2)$ sur $\mathbf{R}$;

5. $f_5 : t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ sur $]0\,;\,1[$ puis $]1\,;\,+\infty[$;

6. $f_6 : t \longmapsto \sin^4(t)$ sur $\mathbf{R}$;

7. $f_7 : t \longmapsto \cos^3(t)\sin(t)$ sur $\mathbf{R}$;

8. $f_8 : t \longmapsto \cos(3t)\sin(2t)$ sur $\mathbf{R}$;

9. $f_9 : t \longmapsto \dfrac{e^t}{\sqrt{1-e^t}}$ sur $]-\infty\,;\,0[$;

10. $f_{10} : t \longmapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ sur $\mathbf{R}$;

11. $f_{11} : t \longmapsto \dfrac{1}{t(1+(\ln(t))^2)}$ sur $]0\,;\,+\infty[$;

12. $f_{12} : t \longmapsto \exp(3t)\cos(2t)$ sur $\mathbf{R}$;

13. $f_{13} : x \longmapsto \dfrac{x}{2x^2+4x+9}$ sur $\mathbf{R}$;

14. $f_{14} : x \longmapsto \dfrac{x^2}{1+x^2}$ sur $\mathbf{R}$;

15. $f_{15} : t \longmapsto \dfrac{2t+3}{t^2-5t+6}$ sur $]2\,;\,3[$;

16. $f_{16} : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+6x+9}$ sur $]-3;+\infty[$;

17. $f_{17} : x \longmapsto \dfrac{2}{x^2+x+1}$ sur $\mathbf{R}$;

18. $f_{18} : x \longmapsto \dfrac{x^4}{x^2-4}$ sur $]-\infty\,;\,-2[$;

19. $f_{19} : x \longmapsto \dfrac{3x^3+1}{x^2+2x+1}$ sur $]-\infty\,;\,1[$;

20. $f_{20} : x \longmapsto \dfrac{x^3-3x+1}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbf{R}$.

Exercice 10.2. Trouver une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $f_1 : x \longmapsto x\sin(3x^2+1)$ sur $\mathbf{R}$;

2. $f_2 : x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{(x^3+3x+2)^3}$ sur $]0\,;\,+\infty[$;

3. $f_3 : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$;

4. $f_4 : x \longmapsto \cos(x)(1+\sin(x))^3$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$;

5. $f_5 : x \longmapsto x^2\exp(x^3)$ sur $\mathbf{R}$;

6. $f_6 : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$;

7. $f_7 : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ sur $]1\,;\,+\infty[$;

8. $f_8 : x \longmapsto \tan^2(x) + \sin^2(x)$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$;

9. $f_9 : x \longmapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ sur $\mathbf{R}$;

10. $f_{10} : x \longmapsto \cos^4(x)$ sur $\mathbf{R}$;

11. $f_{11} : x \longmapsto \dfrac{1}{3+x^2}$ sur $\mathbf{R}$;

12. $f_{12} : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{4x(-1-x)}}$ sur $]-1\,;\,0[$;

13. $f_{13} : x \longmapsto \dfrac{2}{x^2+4x+6}$ sur $\mathbf{R}$;

14. $f_{14} : x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ sur $\mathbf{R}$;

15. $f_{15} : x \longmapsto \sin(2x)e^x$ sur $\mathbf{R}$;

16. $f_{16} : x \longmapsto \dfrac{1}{x+x(\ln x)^2}$ sur $\mathbf{R}_+^\star$;

17. $f_{17} : x \longmapsto \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}$ sur $\mathbf{R}$:

18. $f_{18} : x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan(x)}}$ sur $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$;

19. $f_{19} : x \longmapsto \cos^2(2x)\sin(3x)$ sur $\mathbf{R}$;

20. $f_{20} : x \longmapsto \dfrac{\cos(3x)}{\sqrt{\sin(3x)}}$ sur $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right[$;

21. $f_{21} : x \longmapsto \mathrm{e}^{3x+1}\cos^2(x)$ sur $\mathbf{R}$;

22. $f_{22} : x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{\ln(x)+1}}$ sur $\left]\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;\,+\infty\right[$;

23. $f_{23} : x \longmapsto \dfrac{3x+4}{1+x^2}$ sur $\mathbf{R}$;

24. $f_{24} : x \longmapsto \dfrac{2}{x^2-5x+6}$ sur $]2\,;\,3[$.

Exercice 10.3. Calculer simultanément les intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{\sin(t)+\cos(t)} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)\,\mathrm{d}t}{\sin(t)+\cos(t)},$$

en calculant leur somme et leur différence.

Exercice 10.4. On considère $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$.

1. Déterminer une primitive F de f sur $]0\,;\,\pi[$.

2. Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, déterminer une primitive de f sur $]k\pi\,;\,\pi + k\pi[$.

Intégration par parties

Exercice 10.5. En intégrant par parties, calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$;

2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos(2t)\,\mathrm{d}t$;

3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t$;

4. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 (1+t^2)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$;

5. $I_5 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(t)\,\mathrm{d}t}$;

6. $I_6 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{Arcsin}(t)\,\mathrm{d}t$;

7. $I_7 = \displaystyle\int_1^3 \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

8. $I_8 = \displaystyle\int_0^1 t^2\exp(t)\,\mathrm{d}t$;

9. $I_9 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t\sin(t)\,\mathrm{d}t$;

10. $I_{10} = \displaystyle\int_1^2 (\ln(x))^2\,\mathrm{d}x$;

11. $I_{11} = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x$;

12. $I_{12} = \displaystyle\int_0^1 (t+1)\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10.6. Soit $\alpha \in \mathbf{R}^\star$. Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. $g_1 : t \longmapsto t^\alpha\ln(t)$ sur $]0\,;\,+\infty[$;

2. $g_2 : t \longmapsto (t^2+t+1)\mathrm{e}^{\alpha t}$ sur $\mathbf{R}$;

3. $g_3 : t \longmapsto (t^2+t)\sin(\alpha t)$ sur $\mathbf{R}$.

Exercice 10.7. Calculer la primitive sur $\mathbf{R}$ qui s'annule en 0 de la fonction

$$f : t \longmapsto t\mathrm{e}^t\cos(2t).$$

Exercice 10.8. En intégrant deux fois par parties, calculer la valeur de l'intégrale suivante.

$$I = \int_1^{\exp(\pi)} \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 10.9 (*Intégrales de Wallis*). Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. En effectuant une intégration par parties, montrer que

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

3. En déduire que pour tout entier naturel p, $I_{2p} = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$ et $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Exercice 10.10. Pour tout couple d'entiers naturels (p, q), on pose $I_{(p,q)} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q \,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $(p, q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^\star$, $I_{(p,q)} = \dfrac{q}{p+1} I_{(p+1,q-1)}$.

2. En déduire que pour tout $(p, q) \in \mathbf{N}^2$, $I_{(p,q)} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

3. Démontrer enfin que pour tout $(p, q) \in \mathbf{N}^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

Changement de variable

Exercice 10.11. Effectuer les changements de variable indiqués dans les intégrales suivantes. On ne demande pas de calculer l'intégrale obtenue.

1. $\displaystyle\int_1^3 \mathrm{ch}(x^2-1)\,\mathrm{d}x \quad (x = t-1)$;

2. $\displaystyle\int_0^2 x^3 \cos(x^2)\,\mathrm{d}x \quad (y = x^2)$;

3. $\displaystyle\int_1^4 \sin(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t \quad (u = \sqrt{t})$;

4. $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{1}{\mathrm{ch}(u)}\,\mathrm{d}u \quad (x = \exp(u))$;

5. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\exp(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad (x = \ln(u))$;

6. $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x \qquad (x = \cos(u))$;

7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x \qquad (u = \sqrt{x+1})$;

8. $\displaystyle\int_{3/2}^{5/2} \frac{x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\,\mathrm{d}x \qquad (x = 2+\sin(t))$.

Exercice 10.12. En utilisant les changements de variables indiqués, calculer les intégrales suivantes.

$I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \sqrt{t}$;

$I_2 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ en posant $t = \cos(u)$;

$I_3 = \displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{t}}$ en posant $u = \sqrt{t}$;

$I_4 = \displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1} \sqrt{t(-t-2)}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = t+1$ puis $u = \cos(x)$;

$I_5 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$ en posant $u = \mathrm{e}^t$;

$I_6 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{4t^2-4t+2}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = 2t-1$ puis $u = \mathrm{sh}(x)$;

$I_7 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ en posant $t = \tan(u)$;

$I_8 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(x))\,\mathrm{d}x$ en posant $x = \dfrac{\pi}{4} - u$;

$I_9 = \displaystyle\int_0^{\mathrm{sh}(1)} \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ en posant $u = \mathrm{sh}(x)$;

$I_{10} = \displaystyle\int_{-3}^{-4} \frac{x}{x^4-x^2-2}\,\mathrm{d}x$ en posant $u = x^2$;

$I_{11} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \mathrm{e}^t$.

Exercice 10.13. À l'aide de changements de variable, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \exp(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$.

Exercice 10.14. À l'aide d'un changement de variable, déterminer la primitive sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$.

Exercice 10.15. **1.** Déterminer des nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre réel x distinct de -7,

$$\frac{1}{(7+x)(1+x^2)} = \frac{a}{7+x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$

2. En posant $u = \tan(t)$, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}t}{7+\tan(t)}.$$

Exercice 10.16. À l'aide du changement de variable $u = \ln(t)$, déterminer une primitive sur $\mathbf{R}_+^\star$ de la fonction f définie par :

$$f(t) = \sin(\ln(t)).$$

Exercice 10.17. À l'aide du changement de variable $u = \cos(2t)$, déterminer une primitive sur $\left]0\,; \dfrac{\pi}{2}\right[$ de la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{\sin(t)\cos(t)}{(\tan(t))^2 + (\tan(t))^{-2}}.$$

Exercice 10.18. **1.** Déterminer une primitive sur $\mathbf{R}_+^\star$ de la fonction ln.

2. À l'aide du changement de variable $u = \sin(t)$, déterminer une primitive sur $\left]0\,; \dfrac{\pi}{2}\right[$ de la fonction f définie par

$$f(t) = \cos(t)\ln(\tan(t)).$$

Exercice 10.19. Donner une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{3+\mathrm{ch}(x)}$, en précisant sur quel(s) intervalle(s) c'est une primitive.

Propriétés de l'intégrale

Exercice 10.20. L'objectif de cet exercice est de déterminer tous les triplets réels (α,β,γ) tels que, pour toute fonction polynomiale réelle P de degré inférieur ou égal à 2, on ait

$$\int_2^4 P(t)\,\mathrm{d}t = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4). \tag{10.1}$$

1. Supposons qu'il existe (α,β,γ) tel que tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 vérifie (10.1).

(a) Donner la valeur de $\displaystyle\int_2^4 x^2\,\mathrm{d}x$, puis exprimer $\displaystyle\int_2^4 x^2\,\mathrm{d}x$ en fonction de α, β et γ.

(b) Reprendre la question précédente avec $\displaystyle\int_2^4 x\,\mathrm{d}x$, puis avec $\displaystyle\int_2^4 \mathrm{d}x$.

(c) Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} 4\alpha+9\beta+16\gamma & = & 56/3 \\ 2\alpha+3\beta+4\gamma & = & 6 \\ \alpha+\beta+\gamma & = & 2 \end{array}\right.$.

2. Conclure.