TD 9 Équations et géométrie dans les complexes

Équations

Exercice 9.1. **1.** Calculer les racines carrées de $-18i$, $1-i$, $-\sqrt{3}+i$, $3-4i$, $-5-12i$ et $(1+i)^5$. On donnera les solutions sous forme algébrique.

2. Soit x un nombre réel. Déterminer les racines carrées de $4x+2i(1-x^2)$.

3. **(a)** Déterminer les racines cubiques de $4+4i\sqrt{3}$.

(b) Déterminer les racines quatrièmes de $\dfrac{\sqrt{3}+i}{i-\sqrt{3}}$.

(c) Déterminer les racines cinquièmes de $\dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{\sqrt{3}-i}$.

Exercice 9.2. Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes, d'inconnue z.

1. $(1+i)z^2+iz+(1-i)=0$;

2. $z^2-(5-14i)z-(24+10i)=0$;

3. $(1+i)z^2+(1-i)z+2(1+i)=0$;

4. $z^4+(5i-4)z^2-1-7i=0$;

5. $z^2-(3-2i)z+(5-i)=0$;

6. $1+iz-z^2-iz^3=0$.

Exercice 9.3. Soit $n\in\mathbf{N}^\star$. Résoudre sur $\mathbf{C}$ les équations suivantes d'inconnue z.

1. $(E_1) :\ z^3+1=0$;

2. $(E_2) :\ z^4-i=0$;

3. $(E_3) :\ z^8+1=0$;

4. $(E_4) :\ z^3=-(2+i)^3$;

5. $(E_5) :\ (z^2+1)^7=(z+i)^{14}$;

6. $(E_6) :\ \left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^{2n}=1$.

Exercice 9.4. Soit $\alpha\in\mathbf{R}$. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue complexe z.

1. $3z^2-4z+2=0$;

2. $z^3=1$;

3. $z^7=-1$;

4. $z^3=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$;

5. $z^2=1+i$;

6. $z^6+2z^3+2=0$;

7. $z^4+2z^2+4=0$;

8. $z^2+2(1-i)z+8-2i=0$;

9. $z^4-3iz^2+i-3=0$;

10. $z^3+2z^2+2z+1=0$;

11. $z^2+3(i-1)z+2-3i=0$;

12. $(z^2+1)^n=1 \quad (n\geqslant 1)$;

13. $(z+1)^n=z^n \quad (n\geqslant 1)$;

14. $(\bar{z})^{n-1}=z \quad (n\geqslant 2)$;

15. $z^2-2\sin(\alpha)z+2(1+\cos\alpha)=0$;

16. $z^3-2z^2+8z-7=0$;

17. $z^2-(2+i\alpha)z+2+i\alpha-\alpha=0$;

18. $(z^2+1)^n-(z-i)^{2n}=0$ $(n\geqslant 1)$.

Exercice 9.5. Déterminer le module de $1+\sqrt[3]{2}j+\sqrt[3]{4}j^2$ où $j=\mathrm{e}^{2i\pi/3}$.

Exercice 9.6. Soit ω un nombre complexe fixé. On considère l'équation du second degré

$$(E_\omega) : z^2-(2+i\omega)z+2+i\omega-\omega=0.$$

1. Résoudre (E_ω).

2. Pour quelle(s) valeur(s) de ω cette équation admet-elle deux racines complexes conjuguées ?

Exercice 9.7. On considère l'équation

$$(E)\qquad z^4-4(1+i)z^3+12iz^2-8i(1+i)z-5=0.$$

1. Montrer que l'équation admet une solution réelle x.

2. Montrer que l'équation admet une solution imaginaire pure w.

3. Déterminer des nombres complexes a et b tels que pour tout $z \in \mathbf{C}$, on ait

$$z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 - 8i(1+i)z - 5 = (z-x)(z-w)(z^2+az+b)$$

4. Résoudre (E).

Exercice 9.8. Soit n un entier naturel non nul. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue complexe z,

$$z^n + 2(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z) + 1 = 0.$$

Exercice 9.9. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Calculer la somme et le produit des racines n-ième de l'unité.

Exercice 9.10. Résoudre dans $\mathbf{C}$ les systèmes d'équations suivants.

1. $(A) : \begin{cases} ab = -24 - 10i \\ a + b = 5 - 14i, \end{cases}$

2. $(B) : \begin{cases} uv = 1 - 8i \\ u^2 + v^2 = -2 - 16i. \end{cases}$

Exercice 9.11. On pose $u = \mathrm{e}^{2i\pi/7}$, $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^6$.

1. Calculer $S + T$ et ST. En déduire les valeurs de ces complexes.

2. Calculer $Z = \dfrac{u}{1+u^2} + \dfrac{u^2}{1+u^4} + \dfrac{u^3}{1+u^6}$.

Géométrie avec les nombres complexes

Exercice 9.12. On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{C}\backslash\{1\} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z+i}{z-1} \end{array}$. Déterminer et représenter les ensembles suivants :

1. $E = \{ z \in \mathbf{C}\backslash\{1\} \mid f(z) \in \mathbf{R} \}$;

2. $F = \{ z \in \mathbf{C}\backslash\{1\} \mid |f(z)| = 1 \}$;

3. $G = \left\{ z \in \mathbf{C}\backslash\{1, -i\} \mid \arg(f(z)) = \dfrac{\pi}{2} \ [2\pi] \right\}$.

Exercice 9.13. **1.** Donner l'écriture complexe des trois transformations suivantes : la rotation de centre O et de mesure d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$, la rotation de centre i et de mesure d'angle $-\dfrac{3\pi}{4}$, l'homothétie de centre $1+i$ et de rapport 4.

2. Quelle est l'image de $3i$ par la rotation de centre $1+i$ et de mesure d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

3. Déterminer la nature géométrique des applications suivantes : $z \longmapsto iz + (1-3i)$ et $z \longmapsto 3z + 6 - 2i$.

Exercice 9.14. Soit z un nombre complexe. On considère les points A, B et C d'affixes respectives z, z^2 et z^4.

1. Pour quelles valeurs de z les points A et B sont-ils confondus ?

2. Pour quelles valeurs de z les points A, B et C sont-ils alignés ?

Exercice 9.15. Soit $z \in \mathbf{C}^\star$. On note x et y les deux racines carrées complexes de z. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbf{C}^\star$ tels que les points d'affixes z, x, y forment un triangle rectangle en le point d'affixe z.

Exercice 9.16. On rappelle que $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$. Soit A, B et C trois points du plan de Cauchy, d'affixes respectives a, b et c. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si j ou j^2 est solution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

Exercice 9.17. Dans le plan, on considère un parallélogramme $ABCD$. On construit les points F et G de telle sorte que BCF et CDG soient des triangles équilatéraux extérieurs au parallélogramme. Montrer que AFG est équilatéral.

Exercice 9.18 (*Théorème de Napoléon*). Soit ABC un triangle du plan, sur les côtés duquel on construit extérieurement des triangles équilatéraux ABC', BCA' et CAB'. Montrer que les centres de ces triangles sont les sommets d'un autre triangle équilatéral qui a même centre de gravité que le triangle ABC.

Exercice 9.19. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe du plan de Cauchy. Sur les côtés de ce quadrilatère, on construit extérieurement quatre carrés. On nomme P, Q, R et S les centres de ces carrés, de telle sorte que le quadrilatère $PQRS$ ne soit pas croisé. Démontrer que les diagonales de ce quadrilatère sont perpendiculaires et de même longueur.

Exercice 9.20.

1. **Théorème de l'angle au centre**. Soit O, A, B et M quatre points distincts du plan et Γ le cercle de centre O passant par A et B. Alors,

$$M \in \Gamma \iff \mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv 2\ \mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})\ [2\pi].$$

2. **Théorème de l'angle inscrit**. Soit A, B, M trois points distincts situés sur un même cercle Γ, soit N un point du plan. Alors,

$$N \in \Gamma \iff \mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}}) \equiv \mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})\ [\pi]$$

3. Soit a, b, c et d quatre nombres complexes deux à deux distincts. On définit leur **birapport** par :

$$[a, b, c, d] = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}.$$

Montrer que le birapport $[a, b, c, d]$ est réel si et seulement si les points A, B, C et D, d'affixes respectives a, b, c et d, sont alignés ou cocycliques.