# TD 8 — Bijections réelles et fonctions circulaires réciproques

## Bijections réelles

**Exercice 8.1.** Soit $f : [\mathrm{e}\,;+\infty[ \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

1. Montrer que $f$ réalise une bijection de $[\mathrm{e}\,;+\infty[$ dans un intervalle $J$ à préciser. Soit $g$ l'application réciproque de cette bijection.
2. Étudier la continuité de $g$ et tracer son tableau de variations. Que peut-on dire de la courbe de $g$ (par rapport à la courbe de $f$) ?

**Exercice 8.2.** On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^x \end{array}$

1. Dresser le tableau de variations de $f$.
2. La fonction $f$ est-elle bijective ?
3. Montrer que $f$ réalise une bijection de $[-1\,;+\infty[$ sur un intervalle $J$ que l'on explicitera.
   Soit $\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} [-1\,;+\infty[ & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^x \end{array}$ et $\widetilde{f}^{-1}$ la bijection réciproque de $\widetilde{f}$.
4. (a) Préciser les variations de $(\widetilde{f})^{-1}$ et ses limites aux bornes de son ensemble de départ.
   (b) Calculer $\widetilde{f}^{-1}(-1/\mathrm{e})$, $\widetilde{f}^{-1}(0)$, et $\widetilde{f}^{-1}(\mathrm{e})$.
   (c) Déterminer le domaine $D$ sur lequel la fonction $\widetilde{f}^{-1}$ est dérivable. Montrer que
   $$\forall y \in D, \quad (\widetilde{f}^{-1})'(y) = \frac{1}{y + \exp\left(\widetilde{f}^{-1}(y)\right)}.$$
   Calculer $(\widetilde{f}^{-1})'(0)$ et $(\widetilde{f}^{-1})'(\mathrm{e})$.

**Exercice 8.3.** Considérons la fonction $f : x \longmapsto x \ln x$ définie sur $\mathbf{R}_+^\star$.

1. Montrer que $f$ réalise une bijection de $\left[\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty\right[$ dans un ensemble à préciser. On note $g$ la fonction réciproque de cette bijection.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction $g$. On note $I$ ce domaine.
3. Justifier que $g$ est deux fois dérivable sur $I$.
4. Calculer $g(\mathrm{e})$, $g'(\mathrm{e})$ et $g''(\mathrm{e})$.

## Fonctions circulaires réciproques - formules

**Exercice 8.4.** Simplifier les expressions suivantes.

**1.** $A = \mathrm{Arctan}(-1)$ ; **2.** $B = \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ; **3.** $C = \mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ ; **4.** $D = \mathrm{Arctan}(-\sqrt{3})$ ;

**5.** $E = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ; **6.** $F = \mathrm{Arcsin}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ; **7.** $G = \mathrm{Arccos}\left(\cos\dfrac{8\pi}{5}\right)$ ; **8.** $H = \mathrm{Arctan}\left(\tan\dfrac{7\pi}{6}\right)$ ;

**9.** $I = \mathrm{Arcsin}\left(\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$ ; **10.** $J = \mathrm{Arcsin}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\right)$ ; **11.** $K = \sin\left(\mathrm{Arcsin}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$ ; **12.** $L = \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ;

**13.** $M = \cos\left(\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{3}{5}\right)\right)$ ; **14.** $N = \mathrm{Arcsin}\left(\sin\dfrac{-195\pi}{6}\right)$ ; **15.** $O = \mathrm{Arctan}\left(\tan\dfrac{167\pi}{3}\right)$ ; **16.** $P = \mathrm{Arctan}\left(\sin\dfrac{-\pi}{2}\right)$.

**Exercice 8.5.** Simplifier, pour les réels $x$ pour lesquels elles ont un sens, les expressions suivantes.

**1.** $\operatorname{Arccos}(\cos x)$ ; **2.** $\cos(\operatorname{Arccos} x)$ ; **3.** $\sin(\operatorname{Arccos} x)$ ;

**4.** $\tan(\operatorname{Arcsin} x)$ ; **5.** $\tan(2 \operatorname{Arcsin} x)$ ; **6.** $\sin(2 \operatorname{Arctan} x)$.

**Exercice 8.6.** Simplifier les réels suivants.

**1.** $\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3$ ; **2.** $\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 5 + \operatorname{Arctan} 8$ ; **3.** $4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239}$.

**Exercice 8.7.** **1.** Soit $x \in \mathbf{R}$. Monter que $\operatorname{Arctan}(x)$ est un argument du nombre complexe $1 + ix$.

**2.** En déduire la valeur de $\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3$.

**Exercice 8.8.** Simplifier les réels suivants.

**1.** $A = \operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3) + \operatorname{Arctan}(2 + \sqrt{3})$ ; **2.** $B = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{5}{13}\right) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{16}{65}\right)$.

**Exercice 8.9.** On pose :

$$A = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\right).$$

**1.** Montrer que le nombre $A$ est bien défini puis montrer que $A \in \left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$.

**2.** Montrer que $\sin(A) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$, puis calculer la valeur de $\cos(2A)$.

**3.** Démontrer l'égalité $\cos(4A) = \sin(A)$.

**4.** En déduire la valeur de $A$.

**Exercice 8.10.** Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$. Écrire une relation analogue sur $\mathbf{R}_-^\star$.

**Exercice 8.11.** Montrer les relations suivantes sur des intervalles que l'on précisera.

**1.** $\operatorname{Arctan} x + 2 \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right) = \frac{\pi}{2}$ ; **2.** $2 \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$.

**Exercice 8.12.** Trouver une expression plus simple de la fonction $x \longmapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right) - 2 \operatorname{Arctan}(x)$ sur son ensemble de définition.

**Exercice 8.13.** Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) = \operatorname{Arccos}(1/\operatorname{ch}(x))$.

## Fonctions circulaires réciproques - étude de fonctions

**Exercice 8.14.** Déterminer la limite en 0 des fonctions suivantes :

**1.** $f_1 : x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ ; **2.** $f_2 : x \longmapsto \frac{\sin(3x)}{2x}$ ; **3.** $f_3 : x \longmapsto \frac{\operatorname{Arctan} x}{\sin x}$ ;

**4.** $f_4 : x \longmapsto (3 + \cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ ; **5.** $f_5 : x \longmapsto \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}$.

**Exercice 8.15.** Déterminer le domaine de définition, un ensemble sur lequel la fonction est dérivable puis calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

**1.** $f_1 : x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(1 - x^2)$ ; **2.** $f_2 : x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x\sqrt{1 - x})$ ; **3.** $f_3 : x \longmapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{1 + x}\right)$ ;

**4.** $f_4 : x \longmapsto \frac{\ln(1 + \operatorname{ch}(2x))}{x}$ ; **5.** $f_5 : x \longmapsto 3^{4x^2 - 1}$ ; **6.** $f_6 : x \longmapsto \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$.

**Exercice 8.16.** On considère la fonction $f$, définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f : x \longmapsto \operatorname{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x).$$

**1.** Donner un ensemble sur lequel $f$ est dérivable ainsi que $f'$. On simplifiera au maximum l'expression de $f'$.

**2.** En déduire une expression simplifiée de $f$.

**3.** Tracer la courbe représentative de $f$.

## Fonctions circulaires réciproques - équations

**Exercice 8.17.** Résoudre sur l'ensemble $I$ les équations suivantes.

**1.** $\sin(x) = \dfrac{1}{3}$ sur $I = [2\pi\,;\,4\pi]$ ;

**2.** $\tan(x) = 2$ sur $[-3\pi\,;\,-\pi]$ ;

**3.** $\cos(x) + \sin(x) = -\dfrac{1}{2}$ sur $[\pi\,;\,3\pi]$ ;

**4.** $\cos(x)\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$.

**Exercice 8.18.** On considère l'équation $(E)$ : $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$ d'inconnue réelle $x$.

**1.** Démontrer que $(E)$ admet une unique solution.

**2.** Résoudre $(E)$.

**Exercice 8.19.** Résoudre l'équation $\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arccos}(2x) = a$ d'inconnue réelle $x$, pour $a = \dfrac{\pi}{2}$, puis pour $a = \pi$ et enfin pour $a = \dfrac{\pi}{6}$.