TD 7 Fonctions usuelles

Calculs de limites

Exercice 7.1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+2}{x^2 \ln x - x}$;

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^x - 3}$;

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}+2}{x^8 - 1}$;

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(1/x)$;

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp\left(\dfrac{3x+2}{x+1}\right)$;

6. $\lim\limits_{x \to -1^-} \exp\left(\dfrac{3x+2}{x+1}\right)$;

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{2\ln x}$;

8. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{x^2+\ln(x)}{1+x^3}\right)^n$;

9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+3}{\ln x + \sqrt{x}}$;

10. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(2^x)}{x+1}$;

11. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$;

12. $\lim\limits_{x \to 0^+} (1+x)^{1/x}$;

13. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

Exercice 7.2. **1.** Quelle est la limite de l'expression $5^x/2^x$ en $+\infty$?

2. On introduit les fonction $f : x \longmapsto 2^{(5^x)}$ et $g : x \longmapsto 5^{(2^x)}$. Étudier la limite de la fonction f/g en $+\infty$.

Exercice 7.3. Étudier les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et $-\infty$:

1. $f : x \longmapsto \dfrac{\operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x)}{\exp(2x)}$;

2. $g : x \longmapsto 2\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}(2x)$.

Étude de fonctions

Exercice 7.4. On introduit la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right).$$

1. Déterminer le domaine définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition, puis montrer que f' est du signe de $h : x \longmapsto x - 1 + \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbf{R}^\star$.
3. Étudier la fonction h ainsi définie et déterminer son signe.
4. Dresser le tableau des variations de f, déterminer ses limites, puis tracer rapidement son graphe.

Exercice 7.5. Étudier les fonctions suivantes (domaine de définition, sens de variation, limites, asymptotes éventuelles et allure de la courbe représentative) :

1. $f_1 : x \longmapsto x^x$;

2. $f_2 : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$;

3. $f_3 : x \longmapsto \dfrac{\tan(2x)}{\tan(x)}$.

Exercice 7.6. On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées f_n, qui sont définies pour x appartenant à $]0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1 + n\ln(x)}{x^2}.$$

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant :

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Soit a un réel et f une fonction à valeurs réelles définie sur $[a\,;+\infty[$. On suppose que f est continue et strictement monotone, et on note ℓ la limite de f en $+\infty$.
Alors, pour tout $k \in [f(a)\,;\ell[$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution.

Étude des fonctions f_n

1. Soit $x \in]0\,;\,+\infty[$. Calculer $f_n'(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n-2-2n\ln(x)$.
2. Résoudre l'équation $f_n'(x)=0$ d'inconnue x réelle. Étudier le signe de f_n'.
3. Déterminer la limite de f_n aux bornes de son intervalle de définition.
4. Établir le tableau de variation de la fonction f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n.

Représentation graphique de quelques fonctions f_n. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.

5. Tracer $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.
6. **(a)** Soit $x \in]0\,;\,+\infty[$. Calculer $f_{n+1}(x)-f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n ?

   (b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe $\mathscr{C}_4$ à partir de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

Étude sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ **de l'équation** $f_n(x)=1$. Dans toute la suite, on prendra $n \geqslant 3$.

7. **(a)** Vérifier que $\mathrm{e}^{\frac{n-2}{2n}} > 1$.

   (b) Vérifier que l'équation $f_n(x)=1$, d'inconnue x réelle, n'a pas de solution sur l'intervalle $\left]1\,;\,\mathrm{e}^{\frac{n-2}{2n}}\right[$.
8. Montrer que l'équation $f_n(x)=1$ admet sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{n-2}{2n}}\,;\,+\infty\right[$ exactement une solution notée α_n.
9. On se propose de déterminer la limite de la suite (α_n).

   (a) Calculer $f_n(\sqrt{n})$ et montrer que, pour $n > \mathrm{e}^2$, on a $f_n(\sqrt{n}) \geqslant 1$.

   (b) En déduire que, pour $n \geqslant 9$, on a $\alpha_n \geqslant \sqrt{n}$ et donner la limite de la suite (α_n).
   On rappelle que $\mathrm{e} \approx 2,72$.

Exercice 7.7. Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par :

$$f(x)=\left(\sqrt{1-\sin(2x)}+\sqrt{1+\sin(2x)}\right)^{\frac{1}{\ln(|2\cos(x)|)}}.$$

1. On introduit la fonction g définie sur $\mathbf{R}_+^\star$ par $g : x \longmapsto x\ln(x)$. Établir le tableau des variations de g et déterminer les limites de g aux bornes de son intervalle de définition.
2. Déterminer le domaine de définition D de f.
3. Vérifier que f est π-périodique. Cette fonction est-elle paire ? impaire ?
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$\sqrt{1-\sin(2x)}=|\cos(x)-\sin(x)| \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1+\sin(2x)}=|\cos(x)+\sin(x)|.$$
   En déduire que f est constante sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]\cap D$ et que, pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\cap D$,
$$f(x)=\exp(h(4\cos^2(x))),$$
   où h représente la fonction définie pour tout $x \in]0\,;\,1[\,\cup\,]1\,;\,4[$ par :
$$h(x)=\frac{\ln(4-x)}{\ln(x)}.$$
5. Montrer que f est dérivable sur $\left]\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\cap D$ et exprimer sur cet intervalle la fonction f' à l'aide de la fonction h'.
6. Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]0\,;\,1[\,\cap\,]1\,;\,4[$.
7. En utilisant la question **1.**, déterminer le signe de h' sur $]0\,;\,1[$ et sur $]1\,;\,2]$.
8. A l'aide des résultats précédents, établir le tableau des variations de f (avec les limites) sur $\left]\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\cap D$.
9. Tracer le plus précisément possible le graphe de f sur $[-\pi\,;\,\pi]\cap D$.

Équations et inéquations

Exercice 7.8. Résoudre les équations et inéquations suivante d'inconnue x réelle.

1. $(E_1):\ \ln(x-2) = 2\ln(x-1) - \ln(x+1)$;
2. $(E_2):\ \dfrac{1}{2}\ln(3x-1) < \ln(x+1)$;
3. $(E_3):\ \mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{x} < 4$;
4. $(E_4):\ \ln(2) + \ln(x) + \dfrac{1}{2}\ln(3) = 4$;
5. $(E_5):\ \ln(2) + \ln(x) + \dfrac{1}{2}\ln(3) \geqslant 4$;
6. $(E_6):\ \big(\exp(x)\big)^2 = \exp(1-2x)$;
7. $(E_7):\ \big(\exp(x)\big)^2 \leqslant \exp(1-2x)$;
8. $(E_8):\ 2^{x^3} = 3^{x^2}$;
9. $(E_9):\ x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Exercice 7.9. Résoudre les équations ou inéquations suivantes, d'inconnue réelle x.

1. $(E_1):\ \ln\left(\dfrac{x+3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$;
2. $(E_2):\ 2\ln x + \ln(2x-1) = \ln(2x+8) + 2\ln(x-1)$;
3. $(E_3):\ \exp(x) - 5 + 6\exp(-x) > 0$;
4. $(E_4):\ \exp(3x) - 3\exp(2x) + 3\exp(x) = 1$;
5. $(E_5):\ (x^2)^x = x^{(x^2)}$;
6. $(E_6):\ 5\,\mathrm{ch}(x) - 4\,\mathrm{sh}(x) = 3$;
7. $(E_7):\ 8^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2\times 8^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1}$;
8. $(E_8):\ \dfrac{1}{2}\ln(x-1) + \ln(x+1) = 2\ln\sqrt{1+x}$;
9. $(E_9):\ \mathrm{ch}(x) = -2$;
10. $(E_{10}):\ \mathrm{ch}(x) = 3$.

Exercice 7.10. Résoudre les systèmes suivants, d'inconnue $(x,y)\in\mathbf{R}^2$,

$$(S_1):\left\{\begin{array}{rcl}\mathrm{ch}\,x+\mathrm{ch}\,y & = & 7\\ \mathrm{sh}\,x+\mathrm{sh}\,y & = & 5\end{array}\right.,\qquad (S_2):\left\{\begin{array}{rcl}\mathrm{ch}\,x+\mathrm{sh}\,y & = & 2\\ \mathrm{sh}\,x+\mathrm{sh}\,y & = & 3\end{array}\right..$$

Exercice 7.11.
1. Soit $y\in\,]1\,;+\infty[$. Montrer que l'équation $\mathrm{ch}(x)=y$ d'inconnue x réelle possède deux solutions, qui sont opposées l'une de l'autre. Exprimer la solution positive en fonction de y.
2. Soit $y\in\mathbf{R}$. Déterminer l'unique solution de l'équation $\mathrm{sh}(x)=y$.

Formules

Exercice 7.12 (*Trigonométrie hyperbolique*). Soit $(a,b,x)\in\mathbf{R}^3$. Établir les formules suivantes :

1. $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$;
2. $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b)$;
3. $\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)$;
4. $\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)$.

Exercice 7.13. Soit x un nombre réel non nul, et n un entier naturel. Le but de l'exercice est le calcul (ou plutôt la simplification) des sommes :

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{ch}(kx) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{sh}(kx).$$

1. Rappeler la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q distincte de 1.
2. En déduire la valeur de :
$$E_n = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{kx}.$$
3. Conclure.
4. Pouvez-vous en déduire une expression de :
$$\sum_{k=0}^{n}k\,\mathrm{ch}(kx) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n}k\,\mathrm{sh}(kx) \quad ?$$

Exercice 7.14. Soit $a,b\in\mathbf{R}$. Pour tout $n\in\mathbf{N}^\star$, calculer

$$C_n = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{ch}(a+kb) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{sh}(a+kb).$$