# TD 6 Généralités sur les fonctions

## Vocabulaire sur les fonctions

**Exercice 6.1.** Déterminer le domaine de définition de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)} \times (\exp(x) + \sqrt{x})$.

**Exercice 6.2.** Déterminer le domaine de définition de la fonction réelle définie par $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$.

**Exercice 6.3.** On définit la fonction $k : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(3x+2)^2 \end{array}$. Décrire $k$ comme la composée de 3 fonctions réelles simples.

**Exercice 6.4.** Montrer que $f : x \longmapsto \dfrac{3x - x^2 + 2x^3}{x^5 + 4x - 6}$ définie sur $[-1\,;\,1]$ est une fonction bornée.

**Exercice 6.5.** Montrer que si $f$ et $g$ sont deux fonctions à valeurs réelles bornées sur leur domaine de définition $D$, alors les fonctions $f+g$ et $fg$ sont des fonctions bornées sur $D$. Si $g$ ne s'annule pas, la fonction $f/g$ est-elle encore bornée sur $D$ ?

**Exercice 6.6.**

1. Montrer que toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
2. Expliciter cette décomposition pour la fonction exponentielle : on appelle **cosinus hyperbolique** et on note ch la partie paire de cette décomposition ; on appelle **sinus hyperbolique** et on note sh sa partie impaire.
3. Étudier les deux fonctions ainsi obtenues (tableau de variations, limites et tracé rapide du graphe).
4. Vérifier que pour tout nombre réel $x$, $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$.

**Exercice 6.7.** Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2\cos(x) - 3\sin(3x)}{3 - \cos(x) + \sin(x)}$ puis montrer que cette fonction est périodique et bornée.

**Exercice 6.8.** Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{3}\right) + \sin(4x+3)$ est périodique et bornée.

**Exercice 6.9.** Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction $f$ définie par $f(x) = |\tan(x)| + (\cos(x))^2$ puis étudier sa parité et sa périodicité. Quelles propriétés a sa représentation graphique ?

**Exercice 6.10.** Déterminer le domaine de définition, la parité et la périodicité de chacune des fonctions suivantes, puis en déduire leur domaine d'étude.

1. $f_1 : x \longmapsto \cos(3x)$ ;
2. $f_2 : x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^4 - 4}$ ;
3. $f_3 : x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(|x|)}$ ;
4. $f_4 : x \longmapsto \sin(x) + \sin(2x+3)$ ;
5. $f_5 : x \longmapsto \dfrac{\cos(2x)}{\sin^2(3x)}$ ;
6. $f_6 : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{3x-4}}$.

**Exercice 6.11.** Montrer que toute fonction monotone et périodique est constante.

**Exercice 6.12.**

1. Montrer que les fonction $x \longmapsto \cos(2x)$, $x \longmapsto \sin(x/3)$ et $x \longmapsto \cos(\sqrt{2}x)$ sont périodiques.
2. Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles et périodique. Soit $\lambda \in \mathbf{R}^\star$. Montrer que la fonction $g : x \longmapsto f(\lambda x)$ est périodique et déterminer une de ses périodes.

**Exercice 6.13.**

1. Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

**2.** Prouver que la fonction $f$ définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \cos(x) + \cos(\sqrt{3}x)$ (où $x \in \mathbf{R}$) est bornée et atteint son maximum en 0.

**3.** Cette fonction est-elle périodique ?

**4.** Énoncer une condition suffisante pour laquelle la somme, respectivement le produit, respectivement le quotient, de deux fonctions périodiques est périodique.

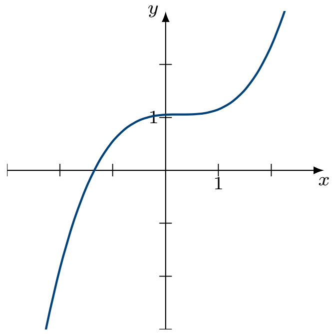
**Exercice 6.14.** Soit $\alpha \in \mathbf{R}^\star$, $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor \alpha x \rfloor - \alpha \lfloor x \rfloor \end{array}$. Montrer que $f$ est périodique si et seulement si $\alpha$ est rationnel.

## Transformations géométriques sur les courbes

**Exercice 6.15.** Rappeler l'allure du graphe de la fonction racine carrée, définie sur $\mathbf{R}_+$. Donner rapidement le graphe des fonctions

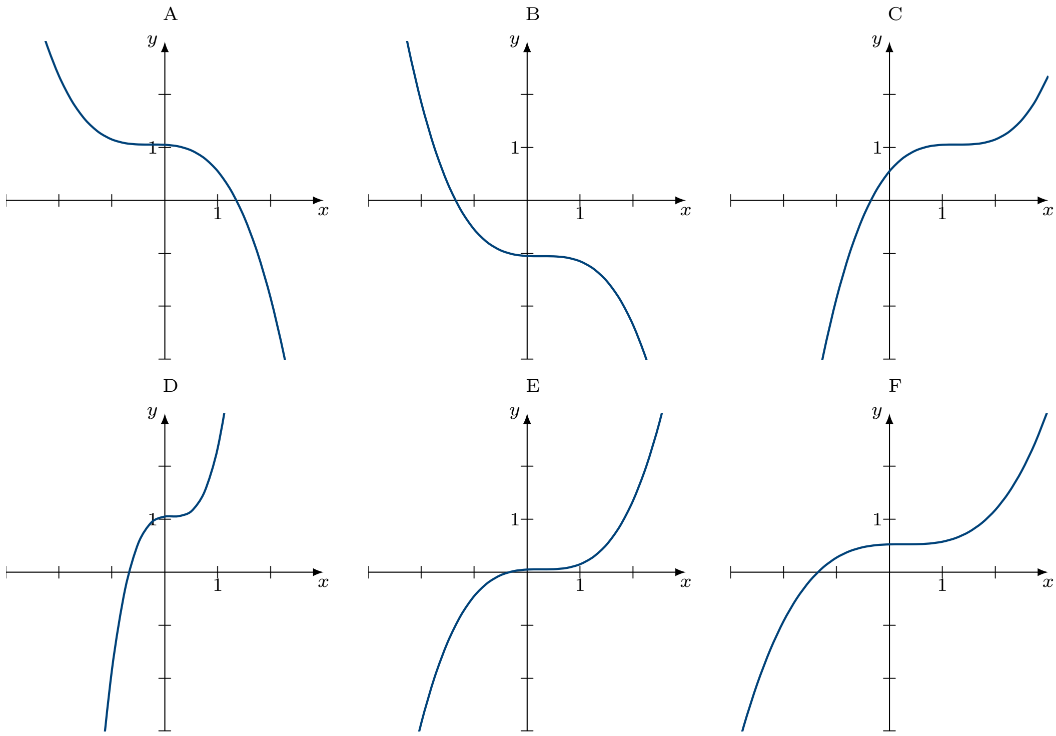
$$f_1 : x \longmapsto \sqrt{-x} \qquad f_2 : x \longmapsto \sqrt{x} + 1 \qquad f_3 : x \longmapsto \sqrt{x+1} \qquad f_4 : x \longmapsto \sqrt{1-x} \qquad f_5 : x \longmapsto \sqrt{\frac{x}{2}}$$

**Exercice 6.16.** Voici la représentation graphique d'une fonction $f$ définie sur $[-2\,;\,2]$.



Choisir parmi les fonctions suivantes celles qui sont représentées par une des courbes données ci-après.

**1.** $f_1 : x \longmapsto f(-x)$ ;
**2.** $f_2 : x \longmapsto -f(x)$ ;
**3.** $f_3 : x \longmapsto f(x+1)$ ;
**4.** $f_4 : x \longmapsto f(x) + 1$ ;
**5.** $f_5 : x \longmapsto f(x-1)$ ;
**6.** $f_6 : x \longmapsto f(x) - 1$ ;
**7.** $f_7 : x \longmapsto f(2x)$ ;
**8.** $f_8 : x \longmapsto 2f(x)$ ;
**9.** $f_9 : x \longmapsto f\left(\frac{x}{2}\right)$ ;
**10.** $f_{10} : x \longmapsto \frac{f(x)}{2}$.



**Exercice 6.17.** À partir des graphes des fonctions usuelles et de transformations simples, tracer, sans étude, le graphe des fonctions suivantes :

**1.** $f_1 : x \longmapsto \exp(x+1)$ ;
**2.** $f_2 : x \longmapsto 2+\cos(x)$ ;
**3.** $f_3 : x \longmapsto \sqrt{1-x}$ ;
**4.** $f_4 : x \longmapsto 1-\exp(x)$ ;
**5.** $f_5 : x \longmapsto 3-\sqrt{2+x}$ ;
**6.** $f_6 : x \longmapsto \ln(1-x)+2$ ;
**7.** $f_7 : x \longmapsto \sin(3x)$ ;
**8.** $f_8 : x \longmapsto 3\sin(x)+1$ ;
**9.** $f_9 : x \longmapsto 3-\exp(-2x)$ ;
**10.** $f_{10} : x \longmapsto \dfrac{1}{2}+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ ;
**11.** $f_{11} : x \longmapsto \dfrac{2+x}{1+x}$ ;
**12.** $f_{12} : x \longmapsto \dfrac{3+x}{1-x}$.

## Autour de la dérivation

**Exercice 6.18.** Pour chacune des fonctions $f_i$ suivantes,

- déterminer leur domaine de définition $\mathcal{D}_{f_i}$ ;
- déterminer sur quelle partie de $\mathcal{D}_{f_i}$ les théorèmes généraux de dérivabilité assurent que $f_i$ est dérivable ;
- calculer leur dérivée.

**1.** $f_1 : x \longmapsto \sin(3x-5)$ ;
**2.** $f_2 : x \longmapsto \left(\ln(x)+3x-\mathrm{e}^x\right)^4$ ;
**3.** $f_3 : x \longmapsto x\exp\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$ ;
**4.** $f_4 : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x(2-x)}{1+x}}$ ;
**5.** $f_5 : x \longmapsto \ln\left(1-\exp(x)\right)$ ;
**6.** $f_6 : x \longmapsto \sqrt{1-\sin(x)}$ ;
**7.** $f_7 : x \longmapsto x^2\ln\left(\sqrt{x}\right)$ ;
**8.** $f_8 : x \longmapsto \mathrm{e}^{-1/x^2}\cos\left(\sqrt{x}\right)$ ;
**9.** $f_9 : x \longmapsto \sqrt{1-\ln(x)}\cos\left(\mathrm{e}^x\right)$ ;
**10.** $f_{10} : x \longmapsto \ln\left(\left|\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right|\right)$.

**Exercice 6.19.** On considère les fonctions suivantes :

$$h : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & (x^2-x+1)\mathrm{e}^x \end{array} \quad \text{et} \quad k : \begin{array}{rcl} ]0\,;+\infty[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+2}{x^2+3}\ln(x) \end{array}$$

**1.** Étudier la limite de $h$ en $+\infty$ ainsi que la limite de $k$ en 0.
**2.** Justifier que $h$ et $k$ sont dérivables sur leur ensemble de définition et calculer leurs dérivées.

**Exercice 6.20.** Déterminer, à l'aide des théorèmes généraux sur la dérivabilité, un ensemble où les fonctions suivantes sont dérivables, puis calculer les dérivées.

**1.** $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)} \times (\exp(x)+\sqrt{x})$ ;
**2.** $\ell : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$.

**Exercice 6.21.** Quelle est le signe de la dérivée de $f : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ ? Cette fonction est-elle décroissante sur $\mathbf{R}^\star$ ?

**Exercice 6.22.** Pour $x$ et $y$ réels, on s'intéresse à $xy^2\cos(x)$. Déterminer

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy^2\cos(x)) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(xy^2\cos(x)).$$

**Exercice 6.23.** Calculer la dérivée troisième de $f : \begin{array}{rcl} ]0\,;+\infty[ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x)+x^2 \end{array}$.

**Exercice 6.24.** Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, déterminer une expression simple de la dérivée $n$-ième de la fonction logarithme.

**Exercice 6.25.** La fonction $f$ est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x\sin x$. Établir l'égalité :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^x\sin\left(x+n\frac{\pi}{4}\right).$$

# Étude de fonctions

**Exercice 6.26.** Quelles sont les variations de $p : x \longmapsto \ln(\cos(x))$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ ?

**Exercice 6.27.** Soit $f$ la fonction dont l'expression est $f(x) = x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

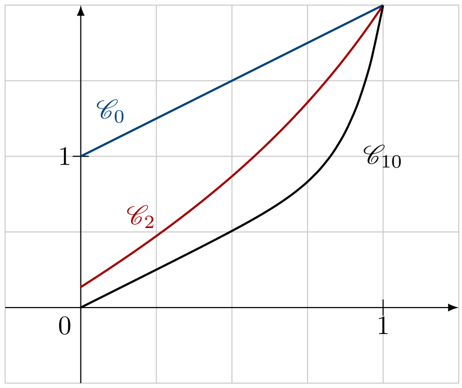
**Exercice 6.28.** Étudier la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2+\cos(x)}{-3+\cos(x)} \end{array}$ et tracer son graphe.

**Exercice 6.29.**

Pour tout entier naturel $n$, on considère la fonction $f_n$ définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{n(x-1)}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$.




1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n$ est strictement positive.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, la fonction $f_n$ est strictement croissante.
3. Montrer qu'il existe un point $A$ du plan qui appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ (où $n$ peut être n'importe quel entier naturel).

**Exercice 6.30.** Soit $k$ un réel fixé. On considère la fonction $f_k : x \longmapsto \sqrt{x^2+3x+k}$.

1. Déterminer le domaine $\mathcal{D}_k$ de définition de $f_k$.
2. Montrer que la courbe représentative $\Gamma_k$ de $f_k$ a la droite d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ pour axe de symétrie. En déduire un domaine d'étude $\mathcal{E}_k$ de la fonction.
3. Sur quel partie $\mathcal{A}_k$ de $\mathcal{E}_k$ les théorèmes classiques assurent-ils que $f$ est dérivable ? Calculer $f'$ sur $\mathcal{A}_k$.
4. Dresser le tableau des variations de $f_k$ sur $\mathcal{E}_k$. Préciser les tangentes horizontales éventuelles.
5. Calculer la limite de $f_k(x) - x$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
6. En déduire qu'il existe un réel $a$ tel que $f_k(x) - (x+a)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$. En déduire que $\Gamma_k$ possède une asymptote dont on précisera une équation.
7. Montrer qu'il existe $c_k \in \mathbf{R}$ tel que $f_k(x) = \sqrt{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 + c_k}$ pour tout $x \in \mathcal{E}_k$. En déduire la position de $\Gamma_k$ par rapport à la droite d'équation $y = x + \dfrac{3}{2}$.
8. Tracer $\Gamma_k$.

**Exercice 6.31.** Pour tout entier relatif $k$, on note $f_k$ la fonction :

$$f_k : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & (x+1)\mathrm{e}^{-kx} \end{array}$$

et on note $\Gamma_k$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Montrer qu'il existe deux points communs à toutes les courbes $\Gamma_k$.

**Exercice 6.32.** Donner le domaine de définition et tracer le graphe des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \lfloor 2x \rfloor, \quad g : x \longmapsto \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}.$$