TD 5 Calcul de sommes et de produits

Simplification de sommes

Exercice 5.1 . Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Écrire sans le symbole somme (avec des points de suspension) les sommes suivantes, puis les calculer :

1. $A = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3^i}$;
2. $B = \sum_{k=1}^{n} \cos(k\pi)$;
3. $C = \sum_{p=1}^{2n} \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{2p+2}\right)$;
4. $D = \sum_{k=0}^{n} \left(2^k + (-2)^k\right)$;
5. $E = \sum_{k=3}^{n} 3^k$;
6. $F = \sum_{k=0}^{n} 2^{2k}$;
7. $G = \sum_{k=0}^{n} n^k$;
8. $H = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$;
9. $I = \sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$.

Si $a, b \in \mathbf{R}$, $\min(a, b)$ désigne le plus petit élément entre a et b (donc si $a \leqslant b$, $\min(a, b) = a$ et sinon $\min(a, b) = b$).

Exercice 5.2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Calculer la somme : $S_n = n + 2(n-1) + 3(n-2) + \cdots + (n-1)2 + n$.

Exercice 5.3 . Soit u une suite de nombres complexes et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Compléter les égalités suivantes :

1. $\sum_{k=2}^{n} u_{k-2} = \sum_{k=?}^{?} u_k$
2. $\sum_{i=2}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{?} u_?$
3. $\sum_{k=1}^{2n} u_k = \sum_{k=?}^{?} u_{2k} + \sum_{k=?}^{?} u_{2k+1}$
4. $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=?}^{?} u_{n+1-k}$.

Exercice 5.4. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer la somme : $S_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$.

Exercice 5.5. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

Exercice 5.6.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. (a) Calculer les valeurs de $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^3$ pour $n \in [\![1, 4]\!]$. En déduire une conjecture pour une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} k^3$ pour tout entier naturel n et la démontrer par récurrence.

   (b) En déduire une simplification de $S = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3$.

Exercice 5.7. Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^\star, \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

et en déduire la valeur de la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.

Exercice 5.8. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Calculer $S = \sum_{k=1}^{n} k \times k!$.

Exercice 5.9. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + n(n-1)2^n$. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{2^n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = v_n + \dfrac{n(n-1)}{2}$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. En calculant de deux façons $\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k)$, exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression de u_n.

Exercice 5.10. Soit z un nombre complexe tel que $|z| \neq 1$. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\left|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \leqslant \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}.$$

Exercice 5.11. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.

Exercice 5.12. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7 en utilisant une factorisation.

Exercice 5.13. On se propose de calculer la partie entière du réel $\alpha = \displaystyle\sum_{k=1}^{10\ 000} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Établir que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire $\lfloor \alpha \rfloor$.

Exercice 5.14. Montrer que pour tout nombre réel x, pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Exercice 5.15.

1. Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, pour tous nombres réels strictement positifs $a_1, \ldots, a_n$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqslant n^2.$$

Simplification de produits

Exercice 5.16. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Simplifier les produits suivants.

1. $P_1 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{k+1}$;
2. $P_2 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.
3. $P_3 = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 5.17. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Donner une expression sans le symbole $\prod$ mais avec des factorielles de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k+1)$.

Exercice 5.18. Pour tout $n \geqslant 2$, on considère le produit $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$.

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$, $P_n = \dfrac{2}{n(n+1)} \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1}$.
2. En déduire une expression simplifiée de P_n.

Coefficients binomiaux et binôme de Newton

Exercice 5.19. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer des expressions simplifiées des coefficients binomiaux suivants.

1. $\binom{n}{0}$; **2.** $\binom{n}{1}$; **3.** $\binom{n}{2}$; **4.** $\binom{n}{n-1}$; **5.** $\binom{n}{n}$.

Exercice 5.20. **1.** Énoncer la formule du binôme de Newton.

2. Quel est le coefficient du terme x^2y^3 dans le développement de l'expression $(2x-y)^5$ (on veut le nombre « devant » x^2y^3 quand on développe $(2x-y)^5$ avec la formule du binôme de Newton) ?

3. Calculer les sommes suivantes, où $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0\,;\,1]$,

(a) $A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$; **(b)** $B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x 2^k$; **(c)** $C = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$;

(d) $D = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$; **(e)** $E = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 2^k$; **(f)** $F = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1} 3^{n-k-1}$;

(g) $G = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 4^{n-k}$; **(h)** $H = \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n}{k} 3^k 5^{n-k}$; **(i)** $I = \sum_{k=2}^{n+2} \binom{n}{k-2} 2^k (-3)^{n-k}$.

Exercice 5.21. **1.** Rappeler la formule du capitaine.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer la somme : $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.

Exercice 5.22. Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. Justifier que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$.

2. Calculer la somme : $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 5.23. Soit $n \in \mathbf{N}$. On considère la fonction f, définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $f(x) = (1 + \mathrm{e}^x)^n$.

1. Dériver deux fois la fonction f.

2. **(a)** Pour $x \in \mathbf{R}$, écrire $f(x)$ comme une somme.

(b) Dériver deux fois d'une nouvelle manière f, en utilisant l'expression obtenue à la question **2.(a)**.

3. Déduire des deux questions précédentes une simplification de $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

Exercice 5.24. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $S_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}$ et $T_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}$. Calculer $S_n + T_n$ et $S_n - T_n$, puis donner les valeurs de S_n et T_n.

Exercice 5.25. Soit m un entier naturel. Démontrer, pour tout entier $n \geqslant m$, l'égalité : $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

Exercice 5.26. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

1. En effectuant le changement d'indice $j = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n.

2. En déduire la valeur de $2S_n$, puis celle de S_n.

Transformation d'expressions trigonométriques

Exercice 5.27. Soit $x \in \mathbf{R}$. Linéariser $\cos^2(x)$, $\cos^3(x)$ et $\sin^4(x)$.

Exercice 5.28. Soit $x \in \mathbf{R}$. Établir les formules suivantes.

1. $\sin(4x) = 4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x)$;

2. $\cos(4x) = \cos^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x)$.

Exercice 5.29.
1. Justifier que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\,;1\right]$.
2. Soit $x \in \mathbf{R}$. Exprimer $\cos(5x)$ à l'aide de $\cos(x)$.
3. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine du polynôme $16X^4 - 20X^2 + 5$.
4. Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 5.30. Calculer la forme trigonométrique du nombre complexe : $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}}$.

Exercice 5.31. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x : $1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) + \cos(5x) = 0$.

Exercice 5.32. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer : $T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\big(ka + (n-k)b\big)$.

Exercice 5.33. Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé.
1. Calculer $S_1(t) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $S_2(t) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.
2. En déduire $S_3(t) = \sum_{k=0}^{n} k\sin(kt)$ pour tout $t \in \mathbf{R}\setminus\{2k\pi \ : \ k \in \mathbf{Z}\}$.
3. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on pose $S_4(t) = \sum_{k=0}^{n} \cos^4(kt)$. Exprimer S_4 en fonction de S_1.

Exercice 5.34. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$.

Exercice 5.35. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k+1}$. Écrire $(1+i)^{2n}$ sous forme trigonométrique et en déduire les valeurs de S_n et T_n.

Exercice 5.36. Soit $(n, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$ tel que $\cos(\alpha) \neq 0$. Calculer $S_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{\cos(p\alpha)}{\cos(\alpha)^p}$.

Sommes doubles

Exercice 5.37. Calculer les sommes suivantes :

1. $A = \sum_{0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} 3$;

2. $B = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{2i-j}$;

3. $C = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$;

4. $D = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^2$.

Si $a, b \in \mathbf{R}$, $\max(a, b)$ désigne le plus grand élément entre a et b (donc si $a \leqslant b$, $\max(a, b) = b$ et sinon $\max(a, b) = a$).

Exercice 5.38. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Simplifier $S = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} \frac{i}{j} \right)$.

Exercice 5.39. Soit $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} 2^j$.
1. Vérifier que $S_n = n2^{n+1} + 1$.
2. Démontrer que $S_n = \sum_{j=0}^{n} (j+1)2^j$.
3. En déduire que : $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.
4. Déterminer alors la valeur de $T_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1}$.