TD 4 Nombres complexes

Forme algébrique d'un complexe

Exercice 4.1. Soit a un nombre complexe différent de i. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1. $z_1 = \dfrac{3-2i}{5-3i}$; **2.** $z_2 = (3+2i)(2+i)^2$; **3.** $z_3 = (a+i)^2$; **4.** $z_4 = \dfrac{a+i}{a-i}$.

Exercice 4.2. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes. Montrer que l'égalité $\mathfrak{Re}(z_1 z_2) = \mathfrak{Re}(z_1)\,\mathfrak{Re}(z_2)$ a lieu si, et seulement si, l'un au moins des deux nombres z_1 ou z_2 est réel.

Forme exponentielle d'un complexe

Exercice 4.3. Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = -3i$; **2.** $z_2 = 1+i$; **3.** $z_3 = 3-3i$; **4.** $z_4 = 1+i\sqrt{3}$; **5.** $z_5 = 3-\sqrt{3}i$.

Exercice 4.4. L'objectif de l'exercice est de calculer $(1+i)^8$ de deux manières différentes.

1. En utilisant une identité remarquable, développer $(1+i)^8$ et donner sa forme algébrique.
2. Donner la forme exponentielle de $1+i$ puis en déduire la forme exponentielle de $(1+i)^8$ et enfin sa forme algébrique.

Exercice 4.5. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants.

1. $z_1 = 1+i$; **2.** $z_2 = 1-i$; **3.** $z_3 = 1+i\sqrt{3}$;

4. $z_4 = -\sqrt{6}+i\sqrt{2}$; **5.** $z_5 = -i$; **6.** $z_6 = (1-\sqrt{2})\mathrm{e}^{i\pi/3}$;

7. $z_7 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$; **8.** $z_8 = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$; **9.** $z_9 = -\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 4.6. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = (-\sqrt{3}-i)^{16}$; **2.** $z_2 = (1-i)^{21}$; **3.** $z_3 = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{20}$; **4.** $z_4 = \left(\dfrac{1-3i}{1+2i}\right)^{10}$.

Exercice 4.7. Soit $\theta \in\,]-\pi, 0[\, \cup\,]0, \pi[$. Déterminer le module et un argument du nombre complexe :

$$Z = 1 + i\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Exercice 4.8. Soit α et β deux nombres réels. Déterminer pour quelles valeurs de α ou β les nombres ci-dessous sont correctement définis puis calculer leur module et en déterminer un argument.

1. $z_1 = 1+\mathrm{e}^{i\alpha}$; **2.** $z_2 = \dfrac{1+\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)}{1-\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)}$; **3.** $z_3 = \dfrac{\mathrm{e}^{i\alpha}+\mathrm{e}^{i\beta}}{1+\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)}}$.

Exercice 4.9. Soit u un nombre complexe non nul. Déterminer le module et un argument de $u+i\overline{u}$.

Exercice 4.10. **1.** Calculer le module et un argument de $\dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2+2i}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

2. Résoudre l'équation (E) suivante, d'inconnue x réelle.

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos(x)+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin(x)=0.$$

Exercice 4.11. Déterminer les nombres entiers $n \geqslant 0$ tels que $\omega_n=(1+i\sqrt{3})^n$ soit un nombre réel.

Exercice 4.12. On pose $j=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

1. Déterminer la forme exponentielle de j.
2. Calculer j^2 et j^3 (on donnera leur forme algébrique).
3. Vérifier que $1+j+j^2=0$.
4. Calculer la somme $1+j+j^2+j^3+\cdots+j^{2021}$.

Autour du module, de l'argument, du conjugué

Exercice 4.13. Soit $(a,b)\in\mathbf{C}^2$ tel que $\bar{a}b\neq 1$. On pose $c=\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}$.

1. Montrer que $|c|=1$ si et seulement si $|a|=1$ ou $|b|=1$.
2. Montrer que $|c|<1$ si et seulement si $|a|$ et $|b|$ sont tous deux strictement supérieurs ou strictement inférieurs à 1.

Exercice 4.14. Déterminer les nombres complexes z tels que

1. $z\big(2\overline{z}+1\big)=1$; **2.** $|z^2|=|z|$; **3.** $\dfrac{z+4i}{5z-3}\in\mathbf{R}$; **4.** $\dfrac{z+4i}{5z-3}\in i\mathbf{R}$.

Exercice 4.15. Quel est l'ensemble E des complexes z tels que z, z^2 et $1-z$ aient le même module ?

Exercice 4.16. Soit z et z' deux nombres complexes distincts de module 1.

1. Montrer que $Z=\dfrac{z^2-1}{z}$ est un imaginaire pur.
2. Montrer que $Z'=\dfrac{zz'-1}{z'-z}$ est un nombre réel.

Exercice 4.17. **1.** Soit $u,v\in\mathbf{C}$. Démontrer l'égalité $|u+v|^2+|u-v|^2=2\big(|u|^2+|v|^2\big)$.

2. Interpréter géométriquement cette égalité pour en déduire une propriété remarquable du parallélogramme. Que retrouve-t-on dans le cas d'un rectangle ?
3. Déterminer une formule permettant de calculer la longueur de la médiane d'un triangle lorsqu'on connaît la longueur de ses trois côtés.

Exercice 4.18 . Démontrer, pour tous nombres complexes z et z', les inégalités suivantes et caractériser les cas d'égalité :

1. $|z|+|z'|\leqslant|z+z'|+|z-z'|$; **2.** $|\,\mathfrak{Re}(z)|+|\,\mathfrak{Im}(z)|\leqslant\sqrt{2}|z|$.

Équations

Exercice 4.19. Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes.

1. $(E_1):\ 2i\overline{z}=1+i$; **2.** $(E_2):\ 2z+3\overline{z}=3-i$.

Exercice 4.20. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^{2z}=3-3\sqrt{3}i$ d'inconnue $z\in\mathbf{C}$.

Exercice 4.21. Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes.

1. $(E_1):\ \mathrm{e}^z=1$; **2.** $(E_2):\ \mathrm{e}^z=-1$;

3. $(E_3):\ \mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}=2$; **4.** $(E_4):\ \mathrm{e}^z-2\mathrm{e}^{-z}+2=0$.

Exercice 4.22. Résoudre les systèmes linéaires suivants, d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{C}^2$.

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} x - iy & = & 1 \\ ix - y & = & 1 \end{array} \right.$;

2. $\left\{ \begin{array}{rcl} ix - iy & = & 1+i \\ ix + y & = & 1-i \end{array} \right.$;

3. $\left\{ \begin{array}{rcl} (1+i)x + (1-i)y & = & i \\ (1-i)x + (1+i)y & = & 1-i \end{array} \right.$;

4. $\left\{ \begin{array}{rcl} (1+i)x + iy & = & 0 \\ 2x + (1+i)y & = & 0 \end{array} \right.$;

5. $\left\{ \begin{array}{rcl} x - iy & = & 1 \\ ix + y & = & i \end{array} \right.$;

6. $\left\{ \begin{array}{rcl} (1+i)x + iy & = & -1+i \\ (1-3i)x + (2-i)y & = & 3+2i \end{array} \right.$.

Exercice 4.23. Soit $(a, b) \in \mathbf{C}^2$. On rappelle que $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$ et que $1 + j + j^2 = 0$. Résoudre le système suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{C}^3$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z & = & 0 \\ x + jy + j^2 z & = & a \\ j^2 y + jz & = & b \end{array} \right.$$