TD 3 Trigonométrie

Utilisation du formulaire

Exercice 3.1. Soit $x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. Simplifier
$$\frac{\sin(2x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(2x)}{\cos(x)}.$$

Exercice 3.2. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 3.3.

1. Soit p et q des réels. Montrer que
$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
à partir des formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ pour $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.
2. Déterminer des formules similaires permettant de transformer en produit $\cos(p) - \cos(q)$, $\sin(p) + \sin(q)$ et ssin$(p) - \sin(q)$

Exercice 3.4. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 3.5. Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer que l'expression $3(\cos^4 x + \sin^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$ ne dépend pas de x

Résolution d'équations, d'inéquations

Exercice 3.6. Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes.

1. $\sin x = 0$;
2. $\sin x = 1$;
3. $\sin x = -1$;
4. $\tan x = 0$;
5. $\tan x = 1$;
6. $\cos x = \frac{1}{2}$;
7. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;
8. $|\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 3.7. Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle I indiqué.

1. $\sin(2x) = \frac{1}{2}$, $I = [0\,;\,2\pi]$.
2. $\tan(5x) = 1$, $I = [0\,;\,\pi]$.
3. $\sin x = \tan x$, $I = [0\,;\,2\pi]$.
4. $12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2$, $I =]-\pi\,;\,\pi]$.
5. $3\sin(2x) - 3\sqrt{3}\cos(2x) = \sqrt{18}$, $I = [0\,;\,2\pi]$.
6. $3\tan(x) = 2\cos(x)$, $I = \mathbf{R}$.
7. $\sin(x) + \sin(3x) = 0$, $I = \mathbf{R}$.
8. $\cos(4x) = \sin(5x)$, $I = \mathbf{R}$.
9. $3\cos(5x) = \sin(2x) + \sin(12x)$, $I = \mathbf{R}$.

Exercice 3.8. Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle I indiqué.

1. $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$, $I =]-\pi\,;\,\pi]$.
2. $\sin x \geqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $I = \mathbf{R}$.
3. $\cos^2 x \geqslant \cos(2x)$, $I =]-\pi\,;\,\pi]$.
4. $\cos^2 x \leqslant \frac{1}{2}$, $I = [0\,;\,2\pi]$.
5. $\cos\frac{x}{3} \leqslant \sin\frac{x}{3}$, $I = [0\,;\,9\pi]$.

Exercice 3.9. Résoudre l'équation (E) : $\sin x + \dfrac{\cos 2x}{2\cos x} = 0$ d'inconnue x réelle.

Exercice 3.10. Soit $E = \mathbf{R} \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \ : \ k \in \mathbf{Z} \right\}$. Dans cet exercice, vous n'avez le droit d'utiliser que les formules d'addition (on remontre ici certaines formules de trigonométrie).

1. Montrer que $\cos(2\theta) = \dfrac{1-\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}$.
2. En déduire une écriture de $\sin(2\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$ pour $\theta \in E$.
3. Résoudre l'équation $\sin(2\theta) = 3\tan(\theta)$ sur E.

Exercice 3.11. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation

$$\cos^{2018} x + \cos^{2019} x + \cos^{2020} x = 3.$$

Exercice 3.12. Résoudre dans $[0\,;\,2\pi]$ l'équation

$$\sqrt{3 - 4\cos^2 x} > 1 + 3\sin x.$$

Exercice 3.13. Soit $n \geqslant 3$.

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $\cos^n(x) + \sin^n(x) = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $\cos^n(x) - \sin^n(x) = 1$.