TD 2 Inégalités, équations et inéquations

Inégalités

Exercice 2.1. Soit $x \in [1\,;\,2]$. Montrer que $\dfrac{1}{(x-4)^2} \in [0\,;\,1]$.

Exercice 2.2. **1.** Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2 - x + \dfrac{1}{2} \geqslant 0$.

2. En déduire que pour tous nombres réels a et b, $a + b \leqslant (1+a^2)(1+b^2)$.

Exercice 2.3. **1.** Montrer que pour tous nombres réels a et b, on a $ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

2. En déduire que pour tous nombres réels a, b et c, on a :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc.$$

Exercice 2.4. **1.** Prouver que pour tous nombres réels x et y non simultanément nuls,

$$\frac{xy}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

2. Soit $(x, y) \in (\mathbf{R}_+^\star)^2$. Déduire de la question précédente que

$$\frac{x}{x^4+y^2} \leqslant \frac{1}{2xy},$$

puis que,

$$\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{x^2+y^4} \leqslant \frac{1}{xy}.$$

Exercice 2.5. Soit a et b deux réels strictement positifs. Démontrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $\dfrac{a}{x} + \dfrac{x}{b} \geqslant 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Exercice 2.6. **1.** Étudier le signe de la fonction f définie par $f(x) = (2x^2+4x+1) - (x+2)^2$.

2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 6$, $2^n + 1 \geqslant (n+1)^2$.

Exercice 2.7. Soit n un entier naturel non nul. Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des nombres réels positifs tels que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i \leqslant b_i$. Prouver que :

$$\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \ldots + \sqrt{a_n}}} \leqslant \sqrt{b_1 + \sqrt{b_2 + \ldots + \sqrt{b_n}}}.$$

Exercice 2.8 (*Inégalité de Bernoulli*). **1.** Démontrer l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall x \in [-1, +\infty[,\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

2. Quand peut-on préciser cette inégalité par une inégalité stricte ?

Valeur absolue

Exercice 2.9. Écrire sans valeur absolue, suivant la valeur de x, les expressions suivantes.

1. $f(x) = |3x-2|$; **2.** $f(x) = |2x+4| + |-3x+6|$; **3.** $f(x) = 2\,|3x-9| - 3\,|x-5|$.

Exercice 2.10. Soit $x \in \mathbf{R}$. Pour chaque question, trouver une assertion équivalente sous la forme $|x-a| \leqslant b$ ou $|x-a| \geqslant b$, où a et b sont des réels à déterminer.

1. $x \in [3\,;\,7]$;

2. $x \in [-4\,;\,9]$;

3. $x \in]-\infty\,;\,-2]$ ou $x \in [2\,;\,+\infty[$;

4. $x \notin]8\,;\,14[$.

Exercice 2.11. Représenter graphiquement les ensembles suivants.

1. $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x-1| \leqslant 3\}$;

2. $B = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| < 2\}$;

3. $C = \{x \in \mathbf{R} \mid |x-2| \geqslant 1\}$.

Exercice 2.12. Considérons la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x}$.

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la distance entre $f(x)$ et 0 est inférieure à $\dfrac{1}{2}$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la distance entre $f(x)$ et 1 est inférieure à ε.

Exercice 2.13. Soit a et b deux réels. On note $\max(a,b)$ le plus grand de ces deux nombres et $\min(a,b)$ le plus petit.

1. Dessiner la droite réelle et y placer les points d'abscisses a, b et $\dfrac{a+b}{2}$. Quelle longueur représente le réel $\left|\dfrac{a-b}{2}\right|$?

2. À l'aide du dessin, conjecturer une expression de $\max(a,b)$ et une expression de $\min(a,b)$ ne faisant intervenir que $\dfrac{a+b}{2}$ et $\left|\dfrac{a-b}{2}\right|$.

3. Démontrer cette conjecture.

Exercice 2.14. **1.** Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $\sqrt{|x+y|} \leqslant \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}$.

2. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \leqslant \sqrt{|x+y|}$.

Exercice 2.15. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose $g(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|}$.
Montrer que pour tous réels x et y, on a $g(x+y) \leqslant g(x) + g(y)$.

Équations, inéquations

Exercice 2.16 (*Inéquations sous forme de quotient*). Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue x réelle.

1. $\dfrac{x+1}{-x+6} < 0$;

2. $\dfrac{3x-4}{2x+3} \geqslant 0$;

3. $\dfrac{\frac{1}{2}x-7}{8x+\frac{1}{3}} \leqslant 0$;

4. $\dfrac{x-4}{x+8} > -1$;

5. $\dfrac{x+2}{x^2-1} \geqslant \dfrac{3}{x-1}$;

6. $\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x+4} \geqslant 0$.

Exercice 2.17. On cherche à résoudre l'équation

$$x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0$$

d'inconnue x réelle.

1. Soit $x \neq 0$. Justifier que

$$x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 8x + 2 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

2. Soit $x \neq 0$. On pose $u = x + \dfrac{1}{x}$. Développer u^2 en fonction de x.

3. Résoudre l'équation $x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0$, d'inconnue x réelle.

Exercice 2.18. Pour tout m réel, on considère (E_m) l'équation $(m-1)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ d'inconnue réelle x.

1. Résoudre les équations (E_0) et (E_1).

2. Pour quelle valeur de m l'équation (E_m) admet-elle $x = 0$ comme solution ? Donner l' éventuelle autre solution.

3. Pour quelles valeurs de m, l'équation (E_m) admet-elle :

(a) une unique solution ?
(b) deux solutions distinctes ?
(c) aucune solution réelle ?

Exercice 2.19. Résoudre les équations ou inéquations suivantes, d'inconnue réelle x.

1. $|x-3| = 5$; **2.** $|x-1| = |4+x|$; **3.** $|2x+1| = -3$;
4. $|x+2| \geqslant 3$; **5.** $|-7x+1| \leqslant 1$; **6.** $|4x+1| \geqslant |2x+1|$.

Exercice 2.20. Soit m un réel fixé. Résoudre l'inéquation $|x-5| \leqslant m+3$ d'inconnue x réelle.

Exercice 2.21. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue x réelle.

$$|2x-3| + |x+1| = 2.$$

Exercice 2.22. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle.

1. $\sqrt{x+3} = 2$; **2.** $2\sqrt{x+1} + 3 = 1$; **3.** $\sqrt{x-3} + \sqrt{x} = 1$;
4. $\sqrt{x+3} \geqslant 2$; **5.** $\sqrt{2x+6} < 6$; **6.** $\sqrt{-x+2} \leqslant -1$;
7. $\sqrt{x+8} > 0$; **8.** $\sqrt{x^2+4x} \geqslant x+1$; **9.** $\sqrt{2-x} - \sqrt{6+3x} \geqslant 0$.

Exercice 2.23. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue x réelle.

$$(E) : \quad \sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{1-x}} = 1.$$

Exercice 2.24. Résoudre sur $\mathbf{R}$ les équations et inéquations suivantes.

1. $x^4 + x^2 + x = x$; **2.** $\sqrt{x+3} = x+2$; **3.** $\dfrac{2x+1}{x-1} \leqslant x+1$.

Exercice 2.25. Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

1. $\sqrt{1-x^2} = 2x+1$; **2.** $\sqrt{1-x^2} > 2x+1$; **3.** $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} = 1$;
4. $|x-1| \leqslant |x-2|$; **5.** $|x-1| + |2x-7| + |x+3| < 6$; **6.** $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| > 3$.

Partie entière

Exercice 2.26. Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes.

1. $\lfloor 3x-1 \rfloor = 7$; **2.** $5\lfloor -4x+1 \rfloor^2 = 9$; **3.** $\lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor x+2 \rfloor$.

Exercice 2.27. Montrer que pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^\star$, $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 2.28. Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes :

1. $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 5-x \rfloor$. **2.** $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$. **3.** $\lfloor 3x \rfloor = 2 - \lfloor x \rfloor$.

Exercice 2.29. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor.$$

Systèmes linéaires

Exercice 2.30. Résoudre les systèmes suivants où x, y, z sont des inconnues réelles.

$$(S_1)\quad \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \qquad (S_2)\quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + y - z = -2 \\ 3x + 4y + z = 3 \end{cases}$$

$$(S_3)\quad \begin{cases} 2x - 2y + z = 3 \\ 3x + y - z = 1 \\ x + 3y - 2z = -2 \end{cases} \qquad (S_4)\quad \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 6z = -2 \\ x + 4y + 10z = 0 \end{cases}$$

$$(S_5)\quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - 4y = 2 \\ -x - 2y = -2 \end{cases} \qquad (S_6)\quad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2.31. Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Discuter, suivant les paramètres a, b et c, du nombre de solutions des systèmes suivants (d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$), puis résoudre ces systèmes.

$$(S_1)\quad \begin{cases} x + 2y - z = a \\ x - y + 2z = b \\ x - 4y + 5z = c \end{cases} \qquad (S_2)\quad \begin{cases} x + y + z = b \\ x - y + 3z = 2 \\ -y + z = 3 \end{cases}$$

Exercice 2.32. Soit $m \in \mathbf{R}$. Résoudre les systèmes suivants, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ ou $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$(S_1)\quad \begin{cases} mx + y = 2m - 1 \\ x + my = 1 \end{cases} \qquad (S_2)\quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - mz = m - 1 \\ mx + y - mz = m^2 - 1 \end{cases}$$

$$(S_3)\quad \begin{cases} x + y = m + 2 \\ x + my = m^2 - m - 3 \\ mx - y = m^2 - 2 \end{cases} \qquad (S_4)\quad \begin{cases} x + my - mz = m \\ 2x + 4y - 4z = 1 \end{cases}$$

Exercice 2.33 (*Écriture cartésienne d'un ensemble*). On considère l'ensemble

$$E = \left\{(x + y + 3z, x + 2y + 4z, 3y + 3z) \;:\; (x, y, z) \in \mathbf{R}^3\right\}.$$

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que (a, b, c) appartienne à E.
2. En déduire une autre écriture de E, sous la forme dite **cartésienne** suivante :

$$E = \left\{ (a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \cdots \right\}.$$

Exercice 2.34. Équilibrer les réactions chimiques suivantes :

1. $FeS_2 + O_2 \longrightarrow Fe_2O_3 + SO_2$
2. $C_4H_{10} + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$

Remarque : pour la première réaction, la question revient à trouver x, y, z et t des entiers tels qu'il y ait autant de chaque atome dans $x\ FeS_2 + y\ O_2$ que dans $z\ Fe_2O_3 + t\ SO_2$.

Exercice 2.35. Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer $\mathscr{S}$.
2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{S}$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathscr{S}$. Montrer que $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in \mathscr{S}$ (on dit alors que $\mathscr{S}$ est **stable par addition**).
3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{S}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \in \mathscr{S}$ (on dit alors que $\mathscr{S}$ est **stable par produit externe**).