TD 1 Logique, ensembles et raisonnements

Assertions et quantificateurs

Exercice 1.1. Les phrases suivantes sont-elles vraies pour toutes les assertions A et B ?

1. Si (A et B) est vraie alors (A ou B) est vraie.
2. Si (A ou B) est vraie alors (A et B) est vraie.
3. Si A est fausse et si A implique B alors B est fausse.
4. Si B est fausse et si A implique B alors A est fausse.

Exercice 1.2. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, E et E' des parties de $\mathbf{R}$. Écrire les négations des propositions suivantes.

1. $x = 0$ ou $y = 1$.
2. $(x^2 = 1) \Longrightarrow x = 1$.
3. $1 \leqslant x < y$.
4. $\forall x \in E,\ \forall x' \in E,\ \Big((x \neq x') \Longrightarrow f(x) \neq f(x')\Big)$.

Exercice 1.3. Pour chacun des énoncés suivants, donner tout d'abord la valeur de vérité, puis donner la négation.

1. Tout multiple de 5 est un multiple de 3.
2. Le successeur d'un nombre pair est un nombre premier.
3. Le quotient de deux suites de termes strictement positifs qui convergent vers 0 est une suite qui converge vers 0.

Exercice 1.4. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}$. On dit que f est une fonction majorée lorsqu'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \leqslant M$.

1. Comment traduire graphiquement le fait que f soit une fonction majorée ?
2. Écrire au moyen de quantificateurs l'assertion « f est une fonction majorée », puis l'assertion « f n'est pas une fonction majorée ».
3. On ne suppose pas nécessairement f majorée. Quelle est la valeur de vérité de l'assertion « pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) \leqslant M$ » ?

Exercice 1.5. On dit qu'une partie A de $\mathbf{R}$ est un intervalle lorsque pour tout $(x, y) \in A^2$ tel que $x \leqslant y$, pour tout $z \in \mathbf{R}$, si $z \in [x\,;\,y]$ alors $z \in A$.
Les parties de $\mathbf{R}$ suivantes sont-elles des intervalles ? Justifier votre réponse.

1. $[0\,;\,1]$;
2. $\mathbf{R}_-^\star$;
3. $\mathbf{R}^\star$.

Exercice 1.6. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\exists x \in \mathbf{Z},\ \exists y \in \mathbf{N},\quad x \leqslant y^2$.
2. $\exists x \in \mathbf{Z},\ \forall y \in \mathbf{N},\quad x \leqslant y^2$.
3. $\forall x \in \mathbf{Z},\ \exists y \in \mathbf{N},\quad x \leqslant y^2$.
4. $\forall x \in \mathbf{Z},\ \forall y \in \mathbf{N},\quad x \leqslant y^2$.

Exercice 1.7. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. Reconnaître les propriétés des fonctions f décrites ci-après.

1. $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$;
2. $\exists x \in I,\ \exists y \in I,\ f(x) \neq f(y)$ (on pourra écrire la négation) ;
3. $\forall x \in I,\ \Big(f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0\Big)$.

Exercice 1.8. On note $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.

1. Donner la négation des propositions suivantes.

   (a) $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\quad (\ x^2 = y^2 \implies x = y\ )$;
   (b) $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}),\ \forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\ (\ x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)\ )$;
   (c) $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}),\ \forall x \in \mathbf{R},\ \forall x' \in \mathbf{R},\ (\ x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')\ )$;
   (d) $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}),\ \forall x \in \mathbf{R},\quad (\ x > 0 \implies f(x) > 0\ )$.

2. Montrer que toutes les propositions précédentes sont fausses.

Exercice 1.9. On rappelle l'énoncé suivant :

> « Soit f une fonction réelle définie et dérivable sur un ensemble I. On suppose que I est un intervalle et que $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$. Alors f est une fonction croissante. »

1. Identifier clairement les hypothèses et la conclusion de cette proposition, puis montrer à l'aide de contre-exemples que chacune des deux hypothèses est essentielle.
2. « f est dérivable sur I et $f' \geqslant 0$ » est-elle une condition nécessaire pour que f soit une fonction croissante ? Est-ce une condition suffisante ?

Exercice 1.10. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Une condition suffisante pour qu'un nombre réel soit supérieur ou égal à 2 est qu'il soit supérieur ou égal à 3.
2. Pour qu'un nombre entier soit supérieur ou égal à 4, il faut qu'il soit strictement supérieur à 3.
3. Pour qu'un nombre réel soit strictement supérieur à 2, il suffit que son carré soit strictement supérieur à 4.

Exercice 1.11. Donner la contraposée des implications suivantes :

1. Soit x un nombre réel. Si x est supérieur à 3, alors $2x$ est supérieur à 5.
2. Si je dors, je ne suis pas éveillé.

Ensembles

Exercice 1.12. Écrire à l'aide des symboles $\cap$, $\cup$, et d'ensembles écrits en compréhension les ensembles suivants.

1. A, l'ensemble des entiers naturels multiples de 7 et pairs.
2. B, l'ensemble des entiers naturels multiples de 7 ou de 9.
3. C, l'ensemble des entiers naturels multiples de 7 ou de 9, et pairs.

Exercice 1.13. Compléter :

1. $\{3k + 2\ :\ k \in \mathbf{N}\} = \{n \in \mathbf{Z} \mid \dots\}$.   **2.** $\{\dots\ :\ k \in \mathbf{N}\} = \{n \in \mathbf{N} \mid \exists k \in \mathbf{Z},\ n = 7k - 2\}$.

Exercice 1.14. **1.** Écrire sous la forme d'une réunion infinie d'ensembles la partie $A = \mathbf{R} \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ :\ k \in \mathbf{Z} \right\}$.

2. Déterminer B tel que l'on ait $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbf{Z}}]n\,;\,n+1[= \mathbf{R} \backslash B$.

Exercice 1.15. Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que $A = B$ si et seulement si $A \cup B = A \cap B$.

Types de raisonnements

Exercice 1.16. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$n \text{ est premier} \implies (n = 2 \text{ ou } n \text{ est impair.})$$

Exercice 1.17. Montrer que les assertions suivantes sont vraies.

1. Si une somme de n termes positifs ou nuls est nulle, alors chacun de ses termes est nul.
2. Si le produit de n facteurs est non nul, alors chacun de ses facteurs est non nul.
3. Si une somme de six nombres réels vaut 60, alors au moins un de ces six nombres est supérieur ou égal à 10 et il existe trois de ces six nombres dont la somme est supérieure ou égale à 30.

Exercice 1.18. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n(n^2 + 1)$ est un entier pair.

Exercice 1.19. Montrer que pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est un multiple de 3 (cela signifie qu'il existe un entier k tel que $n^3 - n = 3k$).

Exercice 1.20. Soit n un entier naturel non nul. On suppose que $4n + 1$ chaussettes sont rangées dans n tiroirs. Montrer que l'un des tiroirs contient au moins 5 chaussettes.

Exercice 1.21.

1. Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est un multiple de 3 alors n est aussi un multiple de 3.
2. Montrer que $\sqrt{3}$ est un irrationnel en raisonnant par l'absurde.

Exercice 1.22. Montrer que si $n \neq 0$ est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 1.23. On considère les parties de $\mathbf{R}^2$ suivantes :

$$F = \left\{ (u, v) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, u + v = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \{(t, t) \,:\, t \in \mathbf{R}\}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que tout couple $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ se décompose de manière unique comme la somme d'un couple de F et d'un couple de G.

1. On suppose qu'il existe une solution au problème, à savoir que pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ fixé, il existe un couple $(u, v) \in F$ et un couple $(t, t) \in G$ tels que $(x, y) = (u, v) + (t, t)$.
   En utilisant la définition de F, déterminer t en fonction de x et y.
2. En déduire u et v en fonction de x et y.
3. Quel type de raisonnement a-t-on commencé à mettre en place ici ? Terminer l'exercice !

Exercice 1.24. On considère les parties de $\mathbf{R}^2$ suivantes :

$$F = \left\{ (u, v) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, u - 2v = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \{(t, 0) \,:\, t \in \mathbf{R}\}.$$

Montrer que tout couple $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ se décompose de manière unique comme la somme d'un couple de F et d'un couple de G.

Exercice 1.25. Montrer qu'il existe un unique nombre réel x tel que, pour tout nombre réel ε strictement positif, $|x| < \varepsilon$.

Exercice 1.26. L'objectif de l'exercice est de déterminer les fonctions f définies sur $\mathbf{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y. \tag{1.1}$$

1. On suppose qu'il existe une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant (1.1).
   (a) Montrer que $f(0) = 1$.
   (b) En déduire l'expression de f.
2. Conclure en précisant soigneusement le raisonnement utilisé.

Exercice 1.27. Montrer à l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse que toute fonction f réelle définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ se décompose de manière unique comme la somme d'une fonction g dont la dérivée s'annule en 0 et d'une fonction linéaire h (c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) = ax$)

Récurrences

Exercice 1.28. On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{u_n}. \tag{1.2}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1$.

Exercice 1.29. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 6 - 2u_n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (-2)^{n+1} + 2$.

Exercice 1.30. On considère la suite u définie par son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}. \tag{1.3}$$

Trouver une formule exprimant le terme général u_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$, puis la démontrer par récurrence.

Exercice 1.31. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n - 1}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{2n} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = -1.$$

Exercice 1.32. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

Exercice 1.33. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.

Exercice 1.34. On considère la suite u définie par la donnée de ses premiers termes $u_0 = 3$, $u_1 = 5$, et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 12u_n.$$

Montrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2 \times 4^n + (-3)^n.$$

Exercice 1.35. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite de réels définie par la donnée de ses trois premiers termes $u_0 = 0$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 2$, et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n. \tag{1.4}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = n(n-1)$.

Exercice 1.36. On définit la suite u par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 1.37. En utilisant un raisonnement de récurrence forte, montrer que pour tout n entier naturel non nul, il existe un unique couple (p, q) d'entiers naturels tel que $n = 2^p(2q+1)$.