

Préparation à l'entrée en Sup au lycée Loritz

C. Ackermann, P. Gaillard, F. Gillet, P.-W. Martelli, M. Miguel-Brebion, A. Rogue

PCSI & PTSI - Lycée Loritz

Introduction

Félicitations pour votre entrée en PCSI ou PTSI au lycée Loritz. Les années qui vous attendent vont être enrichissantes et passionnantes, mais aussi exigeantes.

Ce « cahier de rentrée » est conçu pour vous aider dans votre début d'année en ce qui concerne les matières scientifiques. Il est important de noter qu'il ne contient pas de nouveautés. Toutes les notions présentes ici ont déjà été abordées dans votre scolarité, la plupart en première ou en terminale. Toutefois, nous (les professeurs de sciences) avons constaté que la pratique du calcul est souvent un obstacle important pour les élèves arrivant en première année.

Or, le calcul est une capacité critique à maîtriser pour réussir en classes préparatoires. En effet, calculer vite et juste (mais surtout juste) est nécessaire à la fois en mathématiques, en physique, en chimie, en sciences de l'ingénieur et en informatique. Ainsi, ce cahier contient des exercices couvrant une bonne partie des techniques calculatoires vues au lycée et qui vont servir cette année. Les exercices sont généralement précédés de rappels et de conseils de méthode. Cependant, ce cahier n'a pas vocation à refaire tout le cours de mathématiques du lycée.

La dernière section du cahier est un peu différente. Elle est dédiée à la prise en main du langage Python, dont vous vous servirez dans plusieurs disciplines.

Voici quelques conseils pour vous aider à utiliser ce document.

1. Ne vous précipitez pas. Il faut avant tout calculer juste. La vitesse viendra ensuite avec l'habitude.
2. En exceptant la partie sur Python, tout est à faire par écrit (avec une feuille de papier et un stylo), et **sans utiliser de calculatrice**.
3. Ne passez pas d'exercices même s'ils vous paraissent faciles. En sport et en musique, on répète les mêmes gestes beaucoup de fois afin qu'ils deviennent automatiques. En sciences, c'est pareil, c'est la pratique répétée qui permet de s'améliorer.
4. Visez la régularité plutôt que le sprint. Il faut idéalement faire quelques exercices tous les jours, et ne pas essayer de tout faire en 48 heures.

I Factorisation

I.1 Factorisation directe

Factoriser une expression consiste à transformer une somme en un produit.

Pour factoriser une expression, on peut chercher d'abord à utiliser une règle de distributivité (a , c et d sont ici des réels quelconques).

$$\boxed{a} \cdot \underline{c} + \boxed{a} \cdot \underline{d} = \boxed{a} \cdot (\underline{c} + \underline{d}).$$

Par exemple, si x et y sont des réels, on a

$$4x^2y^3 - 3xy^2 = \boxed{xy^2} \cdot \underline{4xy} - \boxed{xy^2} \cdot \underline{3} = \boxed{xy^2} \cdot (\underline{4xy} - \underline{3}).$$

La question de la factorisation apparaît naturellement lorsque l'on cherche à résoudre une équation en utilisant le principe *produit nul*. Il est donc important de toujours chercher à factoriser « au maximum », c'est-à-dire que le terme commun (le a dans l'écriture ci-dessus) contiennent le plus de termes possibles.

Il faut aussi noter que les facteurs communs ne sont pas toujours apparents. Par exemple, l'expression $x^3 - x^2 + x - 1$ ne semble pas factorisable au premier coup d'oeil, toutefois, en factorisant les deux premiers termes par x^2 , on obtient $x^2(x - 1) + (x - 1)$ qui se factorise en $(x - 1)(x^2 + 1)$.

Dans le même ordre d'idées, $(a - 4)x + 2y(4 - a)$ peut se factoriser en remarquant que $4 - a$ est l'opposé de $a - 4$. Ainsi, on a $(a - 4)x + 2y(4 - a) = (a - 4)x - 2y(a - 4) = (a - 4)(x - 2y)$.

Exercice 1. Soit x , y , a , b , c et d des réels. Factoriser **au maximum** les expressions suivantes.

1. $A = 8ab - 24a + 32ab^2$;

2. $B = 3a^2x - 6ax^2 + 12abx$;

3. $C = (2x - 3)(5x - 1) - (2x - 3)(x + 1)$;

4. $D = (7x - 1)^2 - (7x - 1)(3x + 2)$;

5. $E = (4 - 3x)(2 + 3x) - 2(1 - 2x)(3x - 4)$;

6. $F = (3x + 1)(2x - 3) + (3x + 1)(x + 2) - (5x + 4)(3x + 1)$;

7. $G = (x - 8)(4x - 1) + x^2 - 8x$;

8. $H = x^3 - x^2 + (x + 1)(x - 1)x$.

I.2 Identités remarquables

Pour factoriser une expression, on peut aussi utiliser les identités remarquables du second degré, qui sont à connaître par coeur (a et b sont des réels).

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2, \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2, \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Exercice 2. Soit a, b, x et y quatre réels. Factoriser les expressions suivantes.

1. $A = a^4 + 4a^2b + 4b^2$

2. $B = x^2 - x + \frac{1}{4}$

3. $C = 9x^2 - 6x + 1$

4. $D = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

5. $E = 9b^2 + 6ab + a^2$

6. $F = x^2 - 2x(x + 1) + (x + 1)^2$

7. $G = 4a^2 - 12ab + 9b^2$

8. $H = 9a^2 + \frac{b^2}{4} + 3ab$

9. $I = 4x^2 + 4x + 1$

10. $J = 2x^2 - 12x + 18$

11. $K = 64a^6 - 16a^3b + b^2$

12. $L = (1 - x)^2 + 6x + 3$

Exercice 3. Soit a, b, x et y quatre réels. Factoriser les expressions suivantes.

1. $a^2 - 25$

2. $49x^2 - 25$

3. $\frac{a^2}{9} - \frac{x^2}{25}$

4. $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{x^2}{16}$

5. $(2x+1)^2 - (3x-4)^2$

6. $4(2x+3)^2 - (3x-2)^2$

7. $4x^2 - 1$

8. $5x^3 - 80x$

9. $(a+1)^2 - a^2$

10. $\frac{a^2}{x^2} - \frac{9b^2}{y^2}$

11. $(x+3)^2 - (x+1)^2$

12. $25(3x-1)^2 - 16(5x+3)^2$

13. $9x^2 - 4y^2$

14. $4x^2 - a^2y^2$

15. $9x^2 - (x+2)^2$

16. $(3x-4y)^2 - \frac{25}{4}$

17. $(a+b)^2 - (a-b)^2$

18. $x^4 - 1$

I.3 Mise sous forme canonique d'un trinôme du second degré.

Un des usages les plus courants de ces techniques est la mise sous forme canonique d'une expression polynomiale de degré 2, c'est-à-dire la possibilité de transformer $ax^2 + bx + c$ (où a, b, c sont réel et $a \neq 0$) en une expression de la forme $a((x + \alpha)^2 - \beta)$.

C'est cette forme que vous avez utilisée en première pour obtenir les formules de résolution des équations réelles du second de degré, et nous nous en servirons de nouveau dans un cadre plus général cette année.

Exemple : Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 1 &= 3 \left(x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{1}{3} \right) \\ &= 3 \left(x^2 + 2 \times \frac{5}{6} \times x + \left(\frac{5}{6} \right)^2 - \left(\frac{5}{6} \right)^2 - \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 3 \left(\left(x + \frac{5}{6} \right)^2 - \left(\frac{5}{6} \right)^2 - \frac{1}{3} \right) \\ &= 3 \left(\left(x + \frac{5}{6} \right)^2 - \frac{25}{36} - \frac{12}{36} \right) \\ &= 3 \left(\left(x + \frac{5}{6} \right)^2 - \frac{37}{36} \right) \end{aligned}$$

Mise en facteur du coefficient devant x^2 .

Construction d'un « carré parfait » avec les termes en x^2 et en x de l'expression manipulée. On fait « comme si » les deux premiers termes étaient le début d'une identité remarquable et on ajoute le terme manquant. Il faut également le soustraire pour que cela soit correct.

Utilisation de l'identité remarquable.

Mise au même dénominateur des constantes.

On rassemble les termes constants.

Exercice 4. En suivant cette méthode, mettre sous forme canonique les expressions suivantes :

1. $A = 5x^2 + 2x + 1$;

2. $B = 4x^2 - 6x + 3$;

3. $C = 2x^2 + 3x - 28$.

II Fractions

Opérations sur les fractions

Soit a, b, c et d quatre nombres (réels ou complexes) non nuls.

$$(F1) \quad \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$(F2) \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$(F3) \quad \text{Si } c \text{ n'est pas nul, } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

ATTENTION : Lorsque l'on fait des quotients de fractions en utilisant l'identité (F3), il faut écrire convenablement les fractions afin de ne pas confondre des objets différents. En effet, si a, b et c sont trois nombres, les deux derniers n'étant pas nuls, il ne faut pas confondre

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \frac{a \times 1}{b \times c} = \frac{a}{bc} \quad \text{et} \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{c}} = \frac{a \times c}{1 \times b} = \frac{ac}{b}.$$

Il est donc **impératif** de bien placer le signe « = » entre les fractions et d'adapter la longueur de la barre de fraction pour repérer les différents étages.

Technique : Pour additionner deux fractions qui n'ont pas le même dénominateur, on commence par mettre les deux fractions au même dénominateur en choisissant le dénominateur commun le plus petit possible. Par exemple

$$\frac{3}{16} - \frac{1}{24} = \frac{9}{48} - \frac{2}{48} = \frac{7}{48}.$$

On n'a pas choisi le dénominateur 16×24 , bien plus grand, et qui nous aurait conduit à trouver un résultat difficile à simplifier. De manière analogue, lorsque les dénominateurs mis en jeu dans une somme de fractions sont littéraux, on n'utilise pas nécessairement le produit de ces nombres comme dénominateur de la somme. Par exemple, si n est un entier naturel non nul,

$$\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n} - \frac{2n}{(n+1)^2} = \frac{n(n+1)}{2n(n+1)^2} + \frac{2(n+1)^2}{2n(n+1)^2} - \frac{(2n)^2}{2n(n+1)^2} = \frac{n^2 + n + 2n^2 + 4n + 2 - 4n^2}{2n(n+1)^2} = \frac{-n^2 + 5n + 2}{2n(n+1)^2}.$$

En remarquant que $2n+2 = 2 \times (n+1)$, on a pu ne pas choisir le dénominateur commun $(2n+2) \times n \times (n+1) \times (n+1)^2$, qui aurait conduit à des calculs beaucoup plus lourds.

Exercice 5. Écrire chaque nombre sous la forme d'une fraction irréductible*.

$$1. \quad A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}; \quad 2. \quad B = \frac{1}{24} - \frac{1}{16}; \quad 3. \quad C = \frac{\frac{7}{15} + \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{12}{5}}; \quad 4. \quad D = \frac{\frac{3}{4} + \frac{9}{8} \times \frac{1}{12}}{2 - \frac{4}{3}}; \quad 5. \quad E = \frac{3}{4} + \frac{2}{15} - \frac{1}{2}.$$

* : quotient de deux entiers n'ayant aucun facteur commun dans leur décomposition en produit de nombres premiers.

Exercice 6. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme d'une unique fraction. Dans ces calculs, a et b sont choisis de telle sorte que les dénominateurs manipulés ne soient pas nuls.

1. $A = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1};$

2. $B = \frac{1}{a} + \frac{2}{a+1} - \frac{1}{a+2};$

3. $C = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{2a+1} - \frac{1}{2a+2};$

4. $D = \frac{b + \frac{1}{a}}{a + \frac{1}{b}}.$

Technique : Mettre une fraction sous une certaine forme.

Par exemple, mettons la fraction $\frac{2+x}{3+2x}$ sous la forme $? \times \frac{1+?x}{1+?x}$ où les « ? » sont des nombres réels à déterminer.

Le but ici est de faire commencer le numérateur et le dénominateur par le nombre 1. Pour cela nous allons mettre en facteur au numérateur et au dénominateur le terme constant, c'est-à-dire 2 pour le numérateur et 3 pour le dénominateur :

$$\frac{2+x}{3+2x} = \frac{2\left(1+\frac{1}{2}x\right)}{3\left(1+\frac{2}{3}x\right)}$$

il ne reste plus qu'à « couper » la fraction en deux :

$$\frac{2+x}{3+2x} = \frac{2}{3} \frac{1+\frac{1}{2}x}{1+\frac{2}{3}x}$$

et on obtient la forme demandée.

Exercice 7. Mettre les fractions suivantes sous la forme $\frac{k}{1+\tau p}$, où k et τ sont des réels ne dépendant pas de p :

1. $H_1(p) = \frac{2}{2+3p};$

2. $H_2(p) = \frac{1}{2+2p};$

3. $H_3(p) = \frac{2}{3+p}.$

Exercice 8. Mettre les fractions suivantes sous la forme $\frac{k}{1+\frac{2\varepsilon}{w}p+\frac{p^2}{w^2}}$, où k , w et ε sont des réels ne dépendant pas de p :

1. $H_4(p) = \frac{3}{1+3p+p^2};$

2. $H_5(p) = \frac{2}{2+3p+p^2};$

3. $H_6(p) = \frac{1}{(2+3p)(1+p)}.$

Exercice 9. Remplacer chaque ? des identités suivantes par un nombre explicite de telle sorte que les égalités soient vraies pour tout réel x tel que le dénominateur ne soit pas nul ; les nombres placés peuvent être négatifs.

$$\frac{5x+2}{x+4} = ? \times \frac{1+? \times x}{1+? \times x}$$

$$\frac{4x+3}{3x-4} = ? \times \frac{x+?}{x+?}$$

$$\frac{3x+5}{2x+3} = \frac{? \times (2x+3)+?}{2x+3} = ? + \frac{?}{2x+3}.$$

III Puissances

Opérations avec les puissances entières strictement positives

Soit a, b deux nombres (réels ou complexes). Soit m, n deux entiers naturels non nuls.

$$(P1) \quad a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$(P2) \quad (a^n)^m = a^{nm}$$

$$(P3) \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

$$(P4) \quad \text{Si } b \text{ n'est pas nul, } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Remarque : Une puissance entière n'est jamais qu'une succession de produits. Les formules (P1) à (P4) ne sont que l'écriture des propriétés du produit entre nombres réels ou complexes. Ainsi, si a et b sont deux nombres, on note que

- $a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a) = a \times a \times a \times a \times a = a^5 = a^{2+3}$
- $(a^3)^2 = a^3 \times a^3 = (a \times a \times a) \times (a \times a \times a) = a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6 = a^{3 \times 2}$
- $(a \times b)^3 = (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) = (a \times a \times a) \times (b \times b \times b) = a^3 \times b^3$
- Si b n'est pas nul, $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \frac{a^3}{b^3}.$

Avec des puissances quelconques, les justifications sont les mêmes mais les écritures sont plus compliquées.

Extension au cas des puissances entières négatives ou nulles

Par convention, pour tout nombre réel ou complexe non nul a et tout entier naturel n , $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.

Les identités (P1) à (P4) sont alors aussi valables lorsqu'on choisit pour a et b des nombres non nuls, et pour m et n des entiers relatifs.

Les quotients apparaissant comme des puissances négatives, l'identité (P1) peut s'écrire sous la forme équivalente suivante : si a est un nombre non nul et m, n sont deux entiers relatifs, alors

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Technique pour le calcul avec les puissances

Pour simplifier des produits et des quotients de puissances, on sépare les puissances de produits de nombres différents à l'aide de (P3) et (P4), et on regroupe les puissances différentes des mêmes nombres à l'aide de (P1) et (P2). Cette remarque est tout aussi valable lorsque l'on manipule des puissances d'entiers, que l'on peut décomposer en produit de facteurs premiers.

Exemples :

Soit a et b deux nombres réels ou complexes non nuls. On veut simplifier $A = \frac{a(ab^2)^2}{(a^2b)^3}$. On note que

$$\begin{aligned} A &= \frac{a \times a^2 \times (b^2)^2}{(a^2)^3 \times b^3} && \text{usage de l'identité (P3)} \\ &= \frac{a \times a^2 \times b^4}{a^6 \times b^3} && \text{usage de l'identité (P2)} \\ &= \frac{b}{a^3} && \text{usage de l'identité (P1)} \end{aligned}$$

Soit m et n deux entiers relatifs. On veut simplifier $A = \frac{6^{-n} \times 20^m}{15^{m-n}}$. On note que

$$\begin{aligned} A &= \frac{(2 \times 3)^{-n} \times (2^2 \times 5)^m}{(3 \times 5)^{m-n}} && \text{Décomposition des entiers en facteurs premiers} \\ &= \frac{2^{-n} \times 3^{-n} \times (2^2)^m \times 5^m}{3^{m-n} \times 5^{m-n}} && \text{usage de l'identité (P3)} \\ &= 2^{2m-n} \times 3^{-m} \times 5^n && \text{usage des identités (P1) et (P2)} \end{aligned}$$

Comme dans le calcul précédent, chaque ligne est fondée sur des identités connues, que l'on a citées. Dans une rédaction pratique, on n'écrit pas toutes ces justifications mais il faut vérifier que l'on ne fait qu'appliquer des relations mémorisées.

Une astuce pour les nombres $Q(n)$ qui changent de signe suivant la parité de n

Soit n un entier relatif. Si n est pair alors $(-1)^n = 1$; si n est impair alors $(-1)^n = -1$.

Rappelons que $0,1 = 10^{-1}$, $0,01 = 10^{-2}$, etc, et plus généralement $0,\underbrace{** \dots **}_{n \text{ chiffres}} = ** \dots ** \times 10^{-n}$ (par exemple $0,0385 = 385 \times 10^{-4}$).

Exercice 10. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme d'une puissance de 10.

1. $A = \frac{10^{-9} \times 10^4}{(10^{-3})^2}$;

2. $B = \frac{(10^{-3})^{-2} \times (10^4)^3}{(10^3)^2}$;

3. $C = \frac{10^{-2}(0,1)^3}{(10^2)^2(0,01)^{-4}}$.

Exercice 11. Soit n un entier. Écrire sous forme d'une fraction irréductible d'entiers

1. $A = \frac{(2^5)^3 \times 15^2}{10^2}$;

2. $B = \frac{10^{-5} \times (10^3)^7}{2^{-4} \times (2^5)^2}$;

3. $C = \frac{(-1)^{n+2} \times 12^n}{2^{2n} \times (-3)^n}$;

4. $D = \frac{1,5^3 \times 0,12}{9 \times 10^{-2}}$.

Exercice 12. Soit n un entier et a, b deux réels non nuls. Trouver une écriture plus simple des réels suivants.

1. $A = \frac{(ab)^2 b}{a^{3+n}}$;

2. $B = \frac{2a^3 + 6(ab)^2}{(2a)^2 b}$.

Exercice 13. Remplacer chaque ? des identités suivantes par un rationnel explicite de telle sorte que les égalités soient vraies pour tout réel x variant dans l'ensemble précisé ; les rationnels placés n'ont pas à être égaux et peuvent être négatifs.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(2x + 3)^3 = ? \times (x + ?)^3$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(2x + 3)^3 = ? \times (1 + ? \times x)^3$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $(2x + 3)^4 = x^? \times \left(2 + \frac{3}{x}\right)^4$.

IV Dérivation

Dériver une fonction simple est LA compétence de base pour pouvoir réaliser l'étude d'une fonction réelle. A ce titre, il est donc nécessaire de savoir dériver correctement.

IV.1 Fonctions usuelles

Le tableau qui suit donne les dérivées usuelles des fonctions vues jusqu'à la terminale. Il est à connaître par coeur !! Les notations suivantes sont utilisées : c est une constante réelle, n est un entier naturel non nul.

Expression de f	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Expression de f'
c	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x^n	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$

Lorsque u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle réel I , on dispose également de formules pour dériver une fonction f obtenue à partir d'une opération sur u et/ou v . Dans le tableau suivant, λ , a et b sont des réels quelconques.

Expression de f	Expression de f'	Condition
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$	
$\lambda u(x)$	$\lambda u'(x)$	
$u(x) \times v(x)$	$u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$	
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$	v ne s'annule pas sur I
$\frac{1}{u(x)}$	$\frac{-u'(x)}{(u(x))^2}$	u ne s'annule pas sur I

Ainsi, on peut déjà dériver de nombreuses fonctions. Par exemple, la dérivée de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^3 + \ln(x)$ est la fonction f' telle que pour tout x réel strictement positif, $f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$. Pour obtenir cela, on a utilisé la première formule du tableau des opérations avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = \ln(x)$, et on a ensuite dérivé u et v à l'aide du tableau des dérivées usuelles.

Lorsque que l'on dérive une fonction avec un réel en facteur, il ne faut pas utiliser l'opération de multiplication de deux fonctions, mais l'opération de multiplication par une constante, ce qui est beaucoup plus simple. Par exemple, la dérivée de g définie par $g(x) = 3 \cos(x)$ a pour expression $g'(x) = 3 \cos'(x)$, soit $-3 \sin(x)$.

Exercice 14. Dériver les fonctions définies de la manière suivante :

1. $f_0(x) = \frac{5}{x^4}$

2. $f_1(x) = \ln(x) + e^x$

3. $f_2(x) = 3\sqrt{x} + 1$

4. $f_3(x) = \frac{e^x}{8x^3 - 2x}$

5. $f_4(x) = x \ln(x)$

6. $f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

IV.2 Fonctions composées

En plus des opérations précédentes, on utilise également très souvent la composition de fonctions. C'est le fait de définir une fonction h par $h = g \circ f$ où f et g sont deux fonctions. Cela signifie que pour x dans le domaine de définition de h , on a $h(x) = g(f(x))$. Pour que cela ait un sens, il faut bien sûr que $f(x)$ soit une valeur où g est bien définie.

Si $h = g \circ f$ où f et g sont des fonctions dérivables, alors h est dérivable et pour tout x dans le domaine de définition de h , on a

$$h'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).$$

Cette règle de dérivation est peut-être la plus utile, tant l'utilisation des composées est fréquente. Elle permet d'obtenir de nombreuses règles de dérivation particulière, qui en sont des cas particuliers. Dans le tableau suivant, u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et n est un entier positif.

Expression de h	Expression de h'	Condition
$u(\lambda x)$	$\lambda u'(\lambda x)$	
$\exp(u(x))$	$u'(x) \exp(u(x))$	
$u(x)^n$	$nu'(x)u(x)^{n-1}$	
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	u est à valeurs strictement positives

Illustrons cela par quelques exemples. On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions f, g et h par

$$f(x) = \cos(3x), \quad g(x) = \exp(\sin(x)), \quad h(x) = (2x^3 + x - 1)^5.$$

Pour dériver f , on utilise la règle de dérivation de $x \mapsto u(\lambda x)$ avec u la fonction cosinus et $\lambda = 3$. On en déduit que pour tout x réel, $f'(x) = 3 \times (-\sin(3x)) = -3 \sin(3x)$.

Pour g , c'est la règle de dérivation de $\exp \circ u$ avec u la fonction sinus. Alors, pour tout réel x , $g'(x) = \cos(x) \exp(\sin(x))$.

Enfin, pour la fonction h , c'est la règle de dérivation de u^n avec $n = 5$ et $u(x) = 2x^3 + x - 1$. Pour tout x réel, $h'(x) = 4(2 \times 3x^2 + 1)(2x^3 + x - 1)^4 = 4(6x^2 + 1)(2x^3 + x - 1)^4$.

Exercice 15. Dériver les fonctions définies de la manière suivante :

1. $f_6(x) = \exp(4x)$

2. $f_8(x) = (4x^3 - x^2)^8$

3. $f_{10}(x) = \sin(-x)$

4. $f_7(x) = \ln(x^2 + 1)$

5. $f_9(x) = \exp(\sqrt{x})$

6. $f_{11}(x) = (\ln(x))^3$

7. $f_{12}(x) = (3e^{5x} + 1)^7$

8. $f_{13}(x) = \frac{1}{2x+5} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}$

9. $f_{14}(x) = (1 + \ln(x))^3$

10. $f_{15}(x) = e^{\frac{1}{x-4}}$

IV.3 De la bonne manipulation des constantes

Lorsque l'on étudie une fonction issue de l'étude d'un problème réel, son expression fait généralement intervenir un ou plusieurs paramètres du système, qui sont alors des constantes. Par exemple, dans un circuit LC constitué d'une bobine et d'un condensateur, soumis à un échelon de tension, l'évolution de la tension aux bornes du condensateur est donnée par

$$u(t) = E + A \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \varphi\right),$$

où E , A , T_0 et φ sont des constantes qui dépendent des condensateur, bobine et générateur utilisés ainsi que de l'état initial du système.

Si l'on cherche à dériver une telle fonction, toutes ces quantités sont à considérer comme des constantes. En effet, u est une fonction d'une seule variable (appelée t ci-dessus), et la dériver signifie la dériver par rapport à cette variable t . En pratique, E , A , T_0 et φ se comportent lors de la dérivation exactement de la même façon que s'il s'agissait de nombres réels comme 2 ou 3, 5. Ainsi l'expression de u' est

$$u'(t) = A \times \frac{2\pi}{T_0} \times \left(-\sin\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \varphi\right)\right).$$

Exercice 16. Dans cet exercice, r , E , θ_0 , ω_0 , U et τ sont des constantes réelles strictement positives.

Dériver les fonctions P , θ et I définies comme suit :

1. $P(R) = \frac{RE^2}{(R+r)^2};$

2. $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t);$

3. $I(t) = \frac{U}{r}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$

V Équations et inéquations

V.1 Résolution de systèmes d'équations

Pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues, on peut utiliser la méthode de substitution vue au collège : a, b, c, d, e et f étant des nombres tels que $ad - bc \neq 0$ et $b \neq 0$, on a pour tous nombres x et y ,

$$\begin{aligned} \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} &\iff \begin{cases} y = \frac{e - ax}{b} \\ cx + \frac{de - dax}{b} = f \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{e - ax}{b} \\ (bc - da)x = bf - de \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{e - ax}{b} \\ x = \frac{bf - de}{bc - ad} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{de - bf}{ad - bc} \\ y = \frac{af - ce}{ad - bc} \end{cases} \end{aligned}$$

Une autre méthode pour résoudre ce système est de faire des combinaisons sur les lignes de ce système, en faisant attention de garder un système équivalent. Cela permet parfois d'accélérer les calculs par rapport à la méthode de substitution. Le cas le plus courant où cette méthode produit des résultats immédiats est celui où l'on connaît la somme et la différence des inconnues : a et b étant deux nombres, on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \end{matrix} &\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_1 - L_2]{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{cases} 2x = a + b \\ 2y = a - b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{a + b}{2} \\ y = \frac{a - b}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 17. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1. $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 4x + 5y = -3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 2 \\ \frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 2x + 4y = -1 \end{cases}$

V.2 Résolution d'inéquations

Cette partie est consacrée à la résolution d'inéquations à une inconnue. Une inéquation à une inconnue est un problème qui consiste à déterminer pour quelles valeurs de l'inconnue une inégalité est vraie.

Par exemple, résoudre l'inéquation $2 + x \leq 3$ d'inconnue réelle x consiste à trouver tous les nombres réels x qui rendent cette inégalité vraie. Ici, si $x = 0$ alors l'inégalité est vraie car $2 \leq 3$ est vrai, par contre, si $x = 4$, l'inégalité est fautive car $6 \leq 3$ est faux.

On appelle ensemble des solutions de l'inéquation, l'ensemble des valeurs de l'inconnue qui rendent l'inégalité vraie. Cet ensemble est écrit sous forme d'une réunion d'intervalles ou d'un intervalle.

Pour l'exemple précédent, l'ensemble des solutions de $2 + x \leq 3$ est l'intervalle $] -\infty; 1]$. L'ensemble des solutions de $x^2 > 1$ est la réunion d'intervalles $] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

Rappelons les règles opératoires sur les inégalités.

▷ On peut ajouter aux deux membres d'une inégalité par un nombre réel. Autrement dit,

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \leq b \iff a + c \leq b + c.$$

Cette propriété est également valable pour $\geq$, $>$ et $<$.

▷ On peut multiplier les deux membres d'une inégalité par un nombre réel strictement positif. Autrement dit,

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall c > 0, \quad a \leq b &\iff ac \leq bc \\ a \geq b &\iff ac \geq bc \\ a < b &\iff ac < bc \\ a > b &\iff ac > bc. \end{aligned}$$

On peut multiplier les deux membres d'une inégalité par un nombre réel strictement négatif à condition de changer le sens de l'inégalité. Autrement dit,

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall c < 0, \quad a \leq b &\iff ac \geq bc \\ a \geq b &\iff ac \leq bc \\ a < b &\iff ac > bc \\ a > b &\iff ac < bc. \end{aligned}$$

▷ On peut composer les deux membres d'une inégalité par une fonction strictement croissante. Autrement dit, si f est une fonction strictement croissante sur une partie D de $\mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} \forall a, b \in D, \quad a \leq b &\iff f(a) \leq f(b) \\ a \geq b &\iff f(a) \geq f(b). \end{aligned}$$

On a la même propriété pour les inégalités strictes.

Si f est strictement décroissante, il suffit de changer le sens de l'inégalité.

Méthodologie : Voici la méthode la plus fréquente pour résoudre une inéquation.

1^{re} étape : (étape facultative) On peut composer par une fonction strictement croissante (ou strictement décroissante) pour éliminer une fonction de l'inéquation. Par exemple on peut composer par exponentielle pour retirer un logarithme.

Rappelons que pour tout nombre réel x , $\sqrt{x^2} = |x|$.

2^e étape : On passe tout du même côté de l'inégalité pour se ramener à une inéquation de la forme
« expression en x » ≤ 0 ou « expression en x » ≥ 0 .

3^e étape : On factorise le plus possible l'expression en x .

4^e étape : On cherche le signe de chacun des facteurs de notre factorisation et on consigne ces signes dans un tableau de signes. Pour le signe d'un facteur, il y a 3 cas génériques :

▷ $x - a$ est strictement positif sur $]a; +\infty[$, nul en a et strictement négatif sur $] -\infty; a[$.

▷ Pour un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$, il y a trois cas :

- ◊ si ce trinôme possède deux racines réelles distinctes, il est strictement du signe de a à l'extérieur des racines, nul en les racines, strictement du signe de $-a$ à l'intérieur des racines ;
- ◊ si ce trinôme possède une unique racine, il est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en la racine ;
- ◊ si ce trinôme n'a pas de racine réelle, il est strictement du signe de a .

▷ Pour un terme de la forme $\ln(x)$, $\ln(x) - 1$, $\sqrt{x} - 3$, $\exp(x) - 1$... plus généralement de la forme $f(x) - a$, il faut connaître les variations et les valeurs de la fonction f . Quand f est une fonction usuelle, ces valeurs et variations sont connues, pour les autres fonctions, il est nécessaire de faire une étude de fonction.

Exemple 1 : Résoudre l'inéquation $(E_1) : x^3 - 3x + 1 \geq 2x^2 + 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. (On définit ce que représente la lettre x , ici un nombre réel).

$$\begin{array}{llll}
 (E_1) & \Longleftrightarrow & x^3 - 3x + 1 - (2x^2 + 1) \geq 0 & \text{on passe tout dans le même membre} \\
 & \Longleftrightarrow & x^3 - 2x^2 - 3x \geq 0 & \text{on simplifie} \\
 & \Longleftrightarrow & x(x^2 - 2x - 3) \geq 0 & \text{on factorise}
 \end{array}$$

Le trinôme du second degré a pour discriminant 16 et pour racines -1 et 3 ce qui donne ce tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$		
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
$x^2 - 2x - 3$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
$x(x^2 - 2x - 3)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

L'ensemble des solutions de l'inéquation (E_1) est donc

$$\mathcal{S}_1 = [-1; 0] \cup [3; +\infty[$$

Exemple 2 : Résoudre l'inéquation $(E_2) : x < \frac{1}{x}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ (On définit ce que représente la lettre x de sorte à ce que les deux membres de l'inéquation aient un sens).

Attention ! Lorsqu'on manipule des inégalités, on ne peut pas multiplier sans faire attention. Ici, par exemple, on ne peut pas multiplier par x les deux membres de l'inégalité car on ne connaît pas le signe de x . Si jamais on le fait quand même, on tombe sur l'inéquation $x^2 < 1$ dont l'ensemble des solutions est $] -1, 1[\setminus \{0\}$. Or pour $x = -1/2$, l'inégalité $x < 1/x$ devient $-1/2 < -2$ qui est fausse. Cette méthode (fausse) ne donne pas le bon ensemble de solution de (E_2) .

Utilisons la méthode :

$$(E_2) \quad \Longleftrightarrow \quad x - \frac{1}{x} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2 - 1}{x} < 0$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2 - 1}{x}$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

L'ensemble des solutions de l'inéquation (E_2) est donc

$$\mathcal{S}_2 =]-\infty; -1[\cup]0; 1[$$

Exercice 18. Résoudre les inéquations d'inconnue réelle x ci-dessous. On commencera par donner l'ensemble de définition de ces inégalités, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de l'inconnue x pour lesquelles les deux membres de l'inégalité ont un sens.

1. $x^2 - 3x + 1 \leq -1;$

2. $x^3 - x^2 - 5x + 2 > x + 2;$

3. $x + 1 \leq \frac{2}{x};$

4. $\frac{x-1}{x+1} < \frac{2}{x+1};$

5. $\frac{x^2+x+4}{x-2} \geq \frac{2}{x-1};$

6. $(x-1)^2(x+2) - 1 \geq x-2;$

7. $(x-1)^2 \leq (x+1)^2;$

8. $xe^x + 1 \geq e^x + x;$

9. $\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^2 < x^2;$

10. $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{2x-1};$

11. $\exp(x^2 - 2x) \leq \exp(x - 3);$

12. $\ln(x+2) > \ln(x-1) - \ln(x+1);$

13. $e^{2x} + 4e^x + 3 < 0;$

14. $x^4 - 2x^2 - 8 \leq 0;$

15. $x - 3\sqrt{x} + 2 \geq 0.$

VI Variations d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I (on rappelle qu'un intervalle est un ensemble de la forme $]a; b[$, $]a; b]$, $[a; b[$ ou $[a; b]$, avec $a \leq b$ des réels ou éventuellement $-\infty$, $+\infty$), on utilise le résultat suivant :

- Si $f' \geq 0$, alors la fonction est croissante.
- Si $f' \leq 0$, alors la fonction est décroissante.
- Si $f' > 0$, alors la fonction est strictement croissante.
- Si $f' < 0$, alors la fonction est strictement décroissante.

L'étude des variations se fait donc toujours en trois temps :

1. On détermine l'expression de la dérivée de f .
2. On détermine le signe de $f'(x)$ en fonction de x (souvent dans un tableau de signes).
3. On donne les variations de la fonction (le tableau de variations est souvent inscrit immédiatement après le tableau de signe déterminé à l'étape précédente).

Par exemple, déterminons les variations de la fonction f définie par $f(x) = -x^3 + x^2 + x$, définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$. Ainsi, f' est une fonction polynomiale de degré 2, dont le discriminant vaut $2^2 - 4 \cdot (-3) = 16$, ce qui entraîne que ses racines sont $\frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \cdot (-3)} = 1$ et $\frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \cdot (-3)} = -\frac{1}{3}$. Or, le signe d'un trinôme est celui de son coefficient dominant sauf entre ses racines, d'où :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
f				

Notons que si on veut un tableau de variation complet, il faut aussi indiquer les différentes « valeurs au bout des flèches ». Par exemple ici, il faut calculer $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{27}$ et $f(1) = 1$. Il faut aussi déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$. Il y a des formes indéterminées, qu'on lève en factorisation par le monôme de plus haut degré : pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = x^3 \left(-1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right).$$

Sous cette forme, on obtient rapidement que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. On a alors :

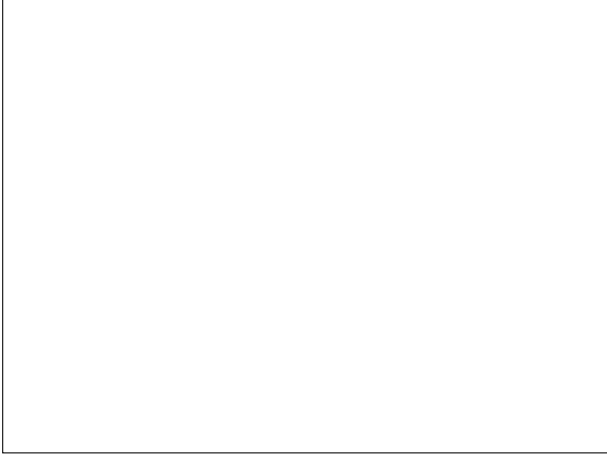
x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
f	$+\infty$	$-\frac{5}{27}$	1	$-\infty$

Exercice 19. Déterminer les variations des fonctions f définies par :

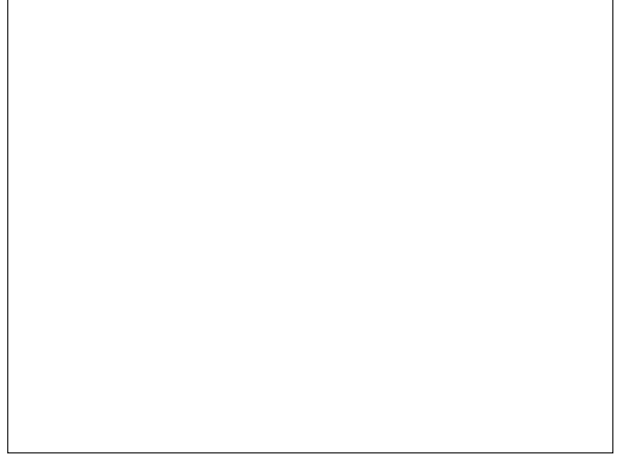
1. $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

2. $f(x) = -x^3 + 3x$

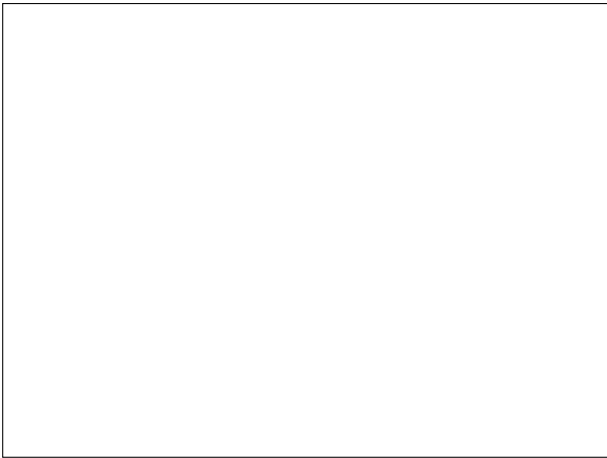
3. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$



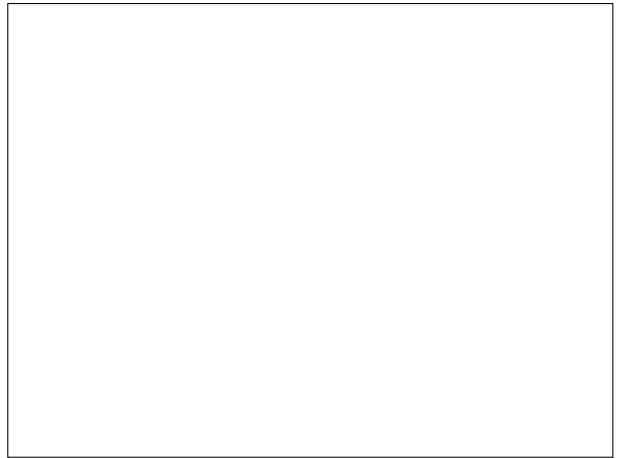
4. $f(x) = x^4 + 8x^2 + 8$



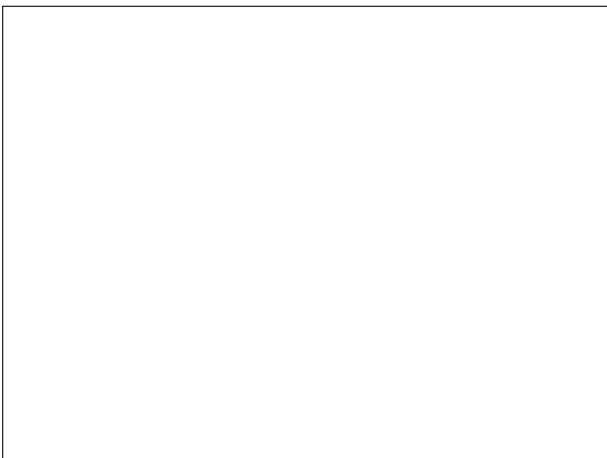
5. $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$



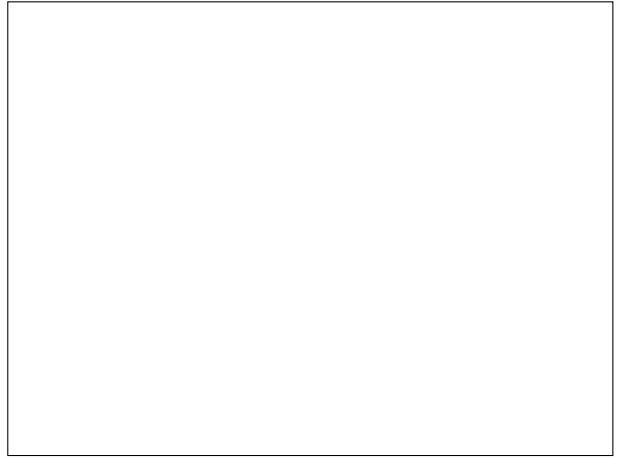
6. $f(x) = \frac{-4x}{x^2+1}$



7. $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x-1)^2}$



8. $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x-2}$



VII Équations différentielles linéaires du premier ordre

On rappelle qu'une équation différentielle du premier ordre est une équation dont l'inconnue est une fonction, l'égalité qui forme l'équation se présentant comme une relation entre la fonction inconnue, sa dérivée, et potentiellement d'autres fonctions.

Résoudre une équation différentielle (sur un intervalle), c'est trouver toutes les fonctions qui vérifient l'équation (sur cet intervalle).

VII.1 Équations à coefficients constants

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ ou $y' - ay = b$ avec a et b des réels.

En mathématiques, la fonction inconnue y est muette, ce qui signifie que l'on peut nommer autrement les solutions, par exemple f ou g . En revanche, en physique/chimie/SI, on garde toujours le même nom.

Soit a et b des nombres réels non nuls.

Les fonctions solutions (sur $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions f_k , où k est un nombre réel, f_k étant définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = k e^{ax}$ pour tout x réel.

Les fonctions solutions (sur $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions g_k , où k est un nombre réel, g_k étant définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $g_k(x) = k e^{ax} - \frac{b}{a}$ pour tout x réel.

Exemple : Soit (E) l'équation différentielle $y' = 2y + 1$.

Résoudre (E) puis déterminer la solution g de (E) telle que $g(1) = 2$.

Les solutions (sur $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle (E) sont les fonctions $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, où k désigne un nombre réel.

$$x \mapsto k e^{2x} - \frac{1}{2}$$

Cherchons la solution g de (E) telle que $g(1) = 2$. Puisque g est solution de (E) , il existe un réel k tel que $g = g_k$. Or $g_k(1) = k e^2 - \frac{1}{2}$, donc $g_k(1) = 2$ si et seulement si $k = \frac{5}{2} e^{-2}$.

La solution de (E) telle que $g(1) = 2$ est donc la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{5 e^{2x-2} - 1}{2}.$$

Exercice 20. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes, puis déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale donnée.

1. $y' = 5y$ et $f(0) = -2$

2. $y' + \frac{3}{4}y = 0$ et $f(0) = 4$

3. $y' + 3y = 5$ et $f(1) = 0$

4. $Li' + Ri = E$ et $i(0) = \alpha$, où L, R, E et α désignent des constantes strictement positives (en fonction desquelles on exprimera les solutions).

Exercice 21. Déterminer la solution g sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y' + 5y = 0$ telle que $g'(2) = 0$.

VII.2 Équations à second membre variable

Exercice 22. On considère l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = x e^x$.

- Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' - 2y = 0$.
- Soit a et b deux nombres réels et soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = (ax + b)e^x$ pour tout x réel.
 - Déterminer a et b pour que g soit solution de (E) .
 - Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E_0) .
 - En déduire l'ensemble des solutions de (E) .
- Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.

Exercice 23. On considère l'équation différentielle $(E) : y' - y = \cos(x) - 3\sin(x)$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' - y = 0$.
2. Soit a et b deux nombres réels et soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ pour tout x réel.
 - (a) Déterminer a et b pour que g soit solution de (E) .
 - (b) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E_0) .
 - (c) En déduire l'ensemble des solutions de (E) .
3. Déterminer la solution de (E) qui s'annule en $\frac{\pi}{3}$.

VIII Intégration

VIII.1 Fonctions usuelles

Soit a et b des nombres réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Soit F une primitive de f sur $[a, b]$, c'est-à-dire une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que $F' = f$ (sur $[a, b]$). Alors, l'intégrale de f de a à b est donnée par :

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a) \quad .$$

Les formules suivantes sont valables sur tout intervalle où la fonction est continue. La démonstration s'obtient en dérivant les "primitives" après avoir justifié de leur dérivabilité sur un intervalle donné.

k désigne une constante réelle. Pour le calcul des intégrales, le plus simple est de choisir $k = 0$.

Fonction	Primitive
λ (constante)	$x \mapsto \lambda x + k$
$x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x) + k$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x + k$
$x \mapsto e^{ax}$ ($a \in \mathbb{R}^*$)	$x \mapsto \frac{e^{ax}}{a} + k$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + k$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + k$

Le tableau précédent et le théorème de dérivation des fonctions composées permet de dresser le tableau suivant. Dans celui-ci, u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans le "bon domaine", et les primitives données sont des primitives sur I des fonctions de la colonne de gauche.

Fonction	Primitive
$u' u^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + k$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + k$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + k$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + k$
$u' e^u$	$e^u + k$
$u' \cos(u)$	$\sin(u) + k$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u) + k$

Exercice 24. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2}.$$

1. Montrer que $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$.

$$x \mapsto \frac{x^2}{x+3}$$

2. Calculer $\int_1^3 f(x) dx$.

Exercice 25. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_0 = \int_{-1}^2 (8x^3 - 2x) dx$

2. $I_1 = \int_0^3 (e^x + 3x - 1) dx$

3. $I_2 = \int_0^1 \left(3\sqrt{x} + \frac{2}{x+1} \right) dx$

4. $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (5t^2 + \cos(t)) dt$

5. $I_4 = \int_0^2 (-3e^{-x} + 1) dx$

6. $I_5 = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

VIII.2 Intégration par partie

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit qu'une fonction définie sur I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , ou plus simplement, est $\mathcal{C}^1$ sur I si et seulement si elle est dérivable sur I et de dérivée continue sur I .

On notera $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (à valeurs réelles).

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I . Soit a et b deux points de I . Alors, on a :

$$\int_a^b u'(t)v(t) \, dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) \, dt$$

En pratique, l'intégration par parties permet de calculer des intégrales (ou des primitives) de produits de fonctions continues et, souvent, on fera en sorte de dériver "la" fonction dont l'expression se simplifie en la dérivant (fonction polynomiale ou logarithmique par exemple), ou de ne pas chercher de primitive non usuelle.

Exemple 1 : calculons $I_1 = \int_0^1 te^t \, dt$.

On définit sur $I = [0; 1]$ deux fonctions u et v par :

$$\forall t \in [0; 1], \quad u(t) = e^t \quad \text{et} \quad v(t) = t \quad .$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a $\forall t \in [0; 1], \quad u'(t) = e^t$ et $v'(t) = 1$.

Puisque u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , on peut effectuer une intégration par parties, d'où :

$$I_1 = \int_0^1 te^t \, dt = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t \, dt = e - [e^t]_0^1 = 1$$

Exemple 2 : trouvons la primitive de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui s'annule en 1.

Puisque $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, un théorème admis en Terminale nous assure que la primitive de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui s'annule en 1 est $\mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_1^x \ln(t) \, dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Calculons $\int_1^x \ln(t) \, dt = \int_1^x 1 \times \ln(t) \, dt$.

On définit sur $\mathbb{R}^{+*}$ deux fonctions u et v par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad u(t) = t \quad \text{et} \quad v(t) = \ln(t) \quad .$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad u'(t) = 1$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$.

Puisque u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et puisque 1 et x sont des nombres réels strictement positifs, on peut effectuer une intégration par parties, d'où :

$$\int_1^x \ln(t) \, dt = [t \ln(t)]_1^x - \int_1^x t \frac{1}{t} \, dt = x \ln(x) - 1 \ln(1) - \int_1^x 1 \, dt = x \ln(x) - x + 1.$$

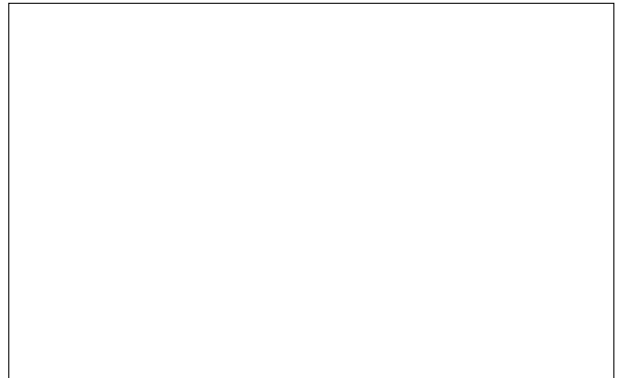
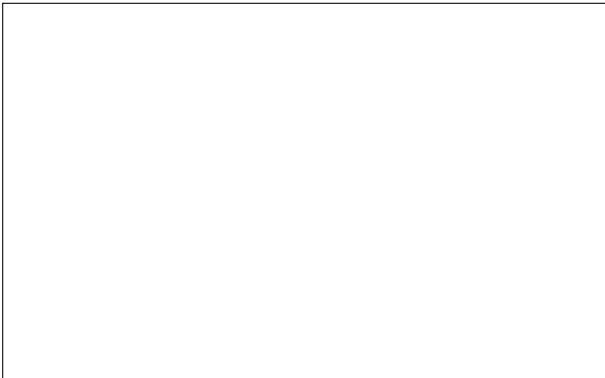
La primitive de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui s'annule en 1 est donc $\mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x \ln(x) - x + 1.$$

Exercice 26. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_0 = \int_1^e (-x + 3) \ln(x) \, dx$

2. $I_1 = \int_0^3 (3x - 1) e^{2x} \, dx$



3. $I_2 = \int_0^\pi 5t \cos(t) \, dt$

4. $I_3 = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t \sin(\omega t) \, dt$, où $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$

Exercice 27. On pose $I = \int_0^1 x e^{-2x} \, dx$ et $J = \int_0^1 x^2 e^{-2x} \, dx$.

1. À l'aide d'une première intégration par parties, exprimer J en fonction de I .
2. Calculer I à l'aide d'une deuxième intégration par parties.
3. En déduire la valeur de J .
4. Calculer $K = \int_0^1 (2x^2 - 3x + 5) e^{-2x} \, dx$ (sans nouvelle intégration par parties dans cette question).

Exercice 28. En vous inspirant de l'exemple 2 ci-dessus, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$.

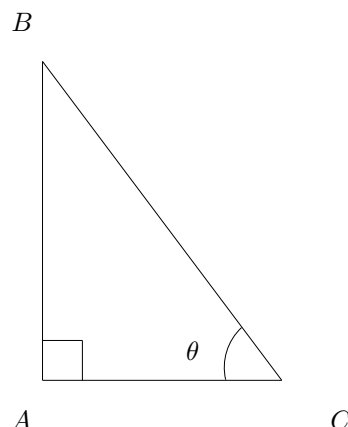
IX Géométrie

IX.1 Trigonométrie

IX.1.1 Trigonométrie dans le triangle rectangle

Le triangle ABC étant rectangle en A , en notant θ une mesure en radians de l'angle $\widehat{ACB}$, on a

$$\cos(\theta) = \frac{AC}{BC} \quad \sin(\theta) = \frac{AB}{BC} \quad \text{et} \quad \tan(\theta) = \frac{AB}{AC}.$$

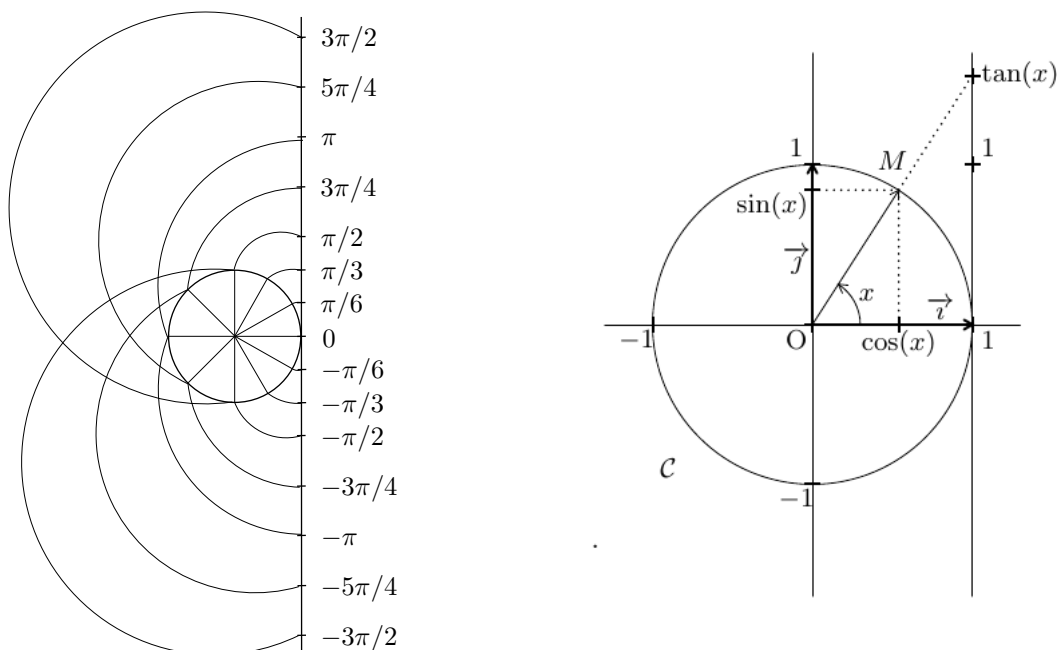


Exercice 29. Compléter le tableau suivant : (cet exercice est à faire en n'ayant pas sous les yeux les 3 formules précédentes si possible)

On connaît :	On veut :	Formule à utiliser
AC et θ	BC	$BC =$
BC et θ	AB	$AB =$
AC et θ	AB	$AB =$
AB et θ	BC	$BC =$
AB et θ	AC	$AC =$
BC et θ	AC	$AC =$

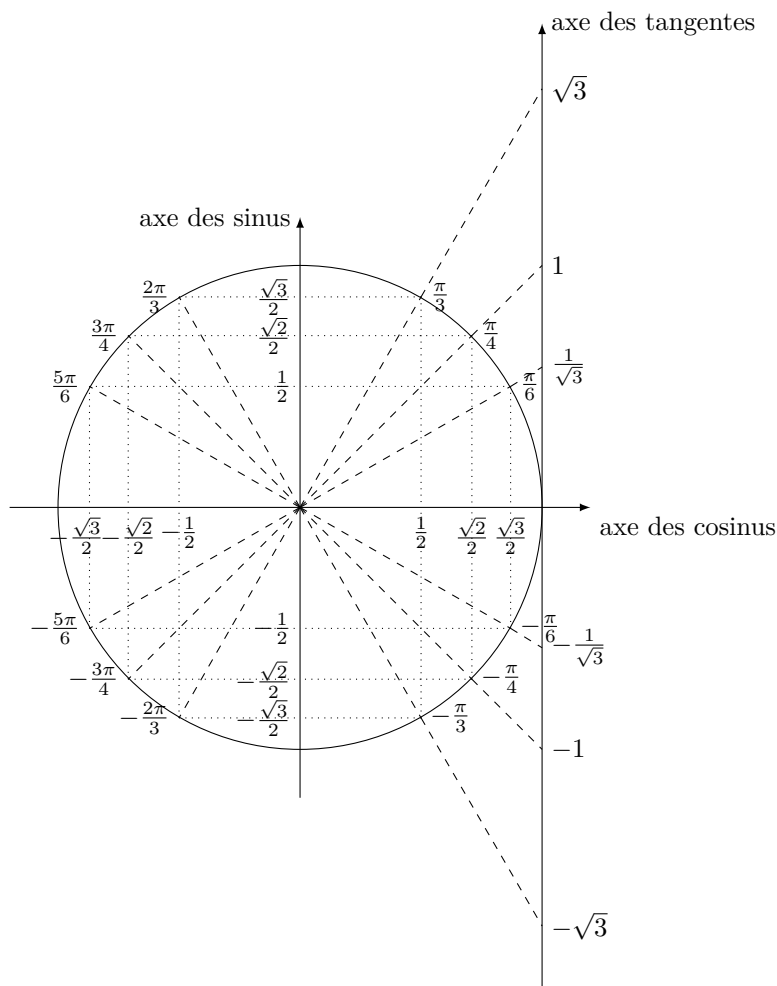
IX.1.2 Cercle trigonométrique

La droite réelle s'entoure autour du cercle trigonométrique et les valeurs de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ sont alors lues avec le cercle trigonométrique de la manière suivante :



On retiendra les valeurs remarquables suivantes :

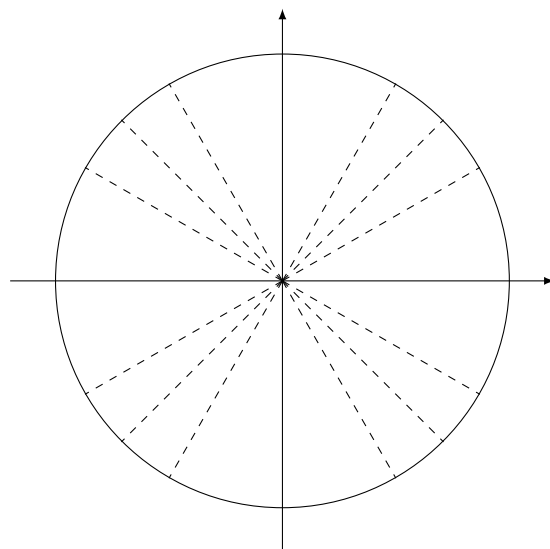
$\cos(0) = 1$	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
$\sin(0) = 0$	$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
$\tan(0) = 0$	$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$	$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ non définie



Exercice 30. Sur le cercle trigonométrique ci-contre repérer les points correspondant à des angles de mesures :

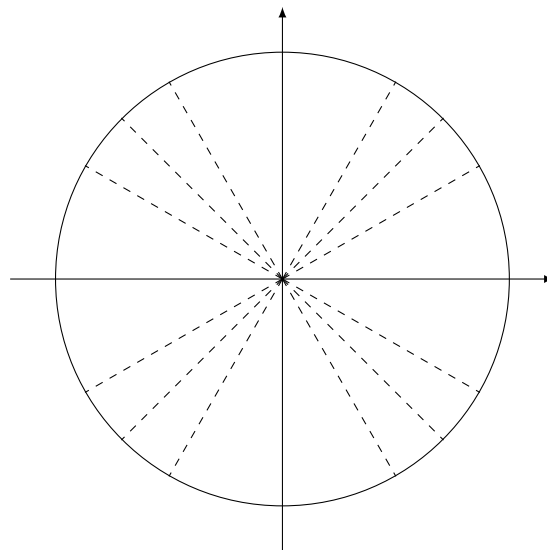
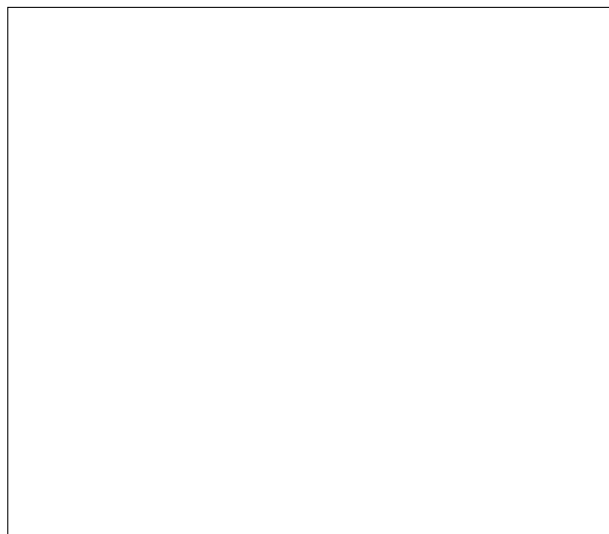
$$\frac{5\pi}{3} ; \quad \frac{-4\pi}{3} ; \quad \frac{7\pi}{6} ; \quad \frac{11\pi}{6} ; \quad \frac{-7\pi}{4} ; \quad \frac{5\pi}{4} ; \quad \frac{-3\pi}{2}.$$

Donner ensuite la valeur du cosinus, du sinus, et de la tangente de ces nombres réels.



Exercice 31. Sans utiliser de calculatrice, et en essayant de placer sur le cercle trigonométrique les points correspondants aux angles intervenants dans les fonctions ; déterminer le signe des nombres suivants :

$$\cos(1) \quad ; \quad \sin(-0.7) \quad ; \quad \tan(2) \quad ; \quad \cos(-2) \quad ; \quad \tan\left(\frac{17\pi}{19}\right) \quad ; \quad \sin\left(-\frac{7}{4}\right).$$



IX.2 Équations de droites

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, toute droite D admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont des constantes réelles. Cela signifie qu'un point M de coordonnées (x, y) appartient à la droite D si et seulement si ses coordonnées vérifient $ax + by + c = 0$.

Le point clé pour trouver une telle équation est que (a, b) sont les coordonnées d'un vecteur normal à D . Si l'on trouve un tel vecteur, il ne reste alors plus qu'à déterminer la valeur de la constante c , par exemple en utilisant un point de la droite dont on connaît les coordonnées.

Détaillons 3 cas de détermination d'une équation d'une droite D

1. Si l'on connaît un point $A(x_A, y_A)$ de D ainsi qu'un vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta)$ de D . Alors, $\vec{v}(-\beta, \alpha)$ est vecteur normal à D . On a alors $a = -\beta$ et $b = \alpha$. On détermine alors c en utilisant que A est un point de D , et que ses coordonnées doivent vérifier $ax_A + by_A + c = 0$ (seul c n'est pas encore connu ici).
2. Si l'on connaît deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ de D , alors on peut déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ qui est directeur de D , et se rapporter au cas précédent.
3. Si l'on connaît un point $A(x_A, y_A)$ de D ainsi que le coefficient directeur p de la droite, il est généralement plus rapide de remarquer que D admet une équation de la forme $y = px + q$, puis de déterminer q à l'aide des coordonnées de A .

Exemples :

- La droite D_0 passant par $A(3, 6)$ et par $B(-1, 8)$ admet $\vec{AB}(-4, 2)$ comme vecteur directeur, donc $u(-2, -4)$ comme vecteur normal, et D_0 donc a une équation cartésienne de la forme $-2x - 4y + c = 0$, où c est une constante réelle. Comme A appartient à D_0 , on doit avoir $-2 \times 3 - 4 \times 6 + c = 0$, et donc $c = 30$. Ainsi, $-2x - 4y + 30 = 0$ est une équation cartésienne de D_0 .
- La droite D_1 passant par $A(3, 7)$ et de pente 2 admet une équation cartésienne de la forme $y = 2x + q$ où q est une constante réelle. A appartient à D_1 , donc $7 = 2 \times 3 + q$, donc $q = 1$. Ainsi, $y = 2x + 1$ est une équation de D_1 .

Exercice 32. Déterminer une équation de chacune des droites suivantes :

1. D_2 passe par $D(3, 3)$ et est dirigée par $\vec{u}(2, 1)$.



2. D_3 passe par les points $A(0, 1)$ et $B(1, 0)$.

3. D_4 a pour coefficient directeur -3 et passe par $C(-2, 4)$.

4. D_5 passe par $E(-2, -3)$ et est dirigée par $\vec{v}(\frac{5}{2}, 3)$.

5. D_6 passe par les points $F(-1, -1)$ et $G(\frac{4}{3}, -3)$.

6. D_7 a pour coefficient directeur π et passe par $H(7, -9)$.

IX.3 Tracé de courbes usuelles

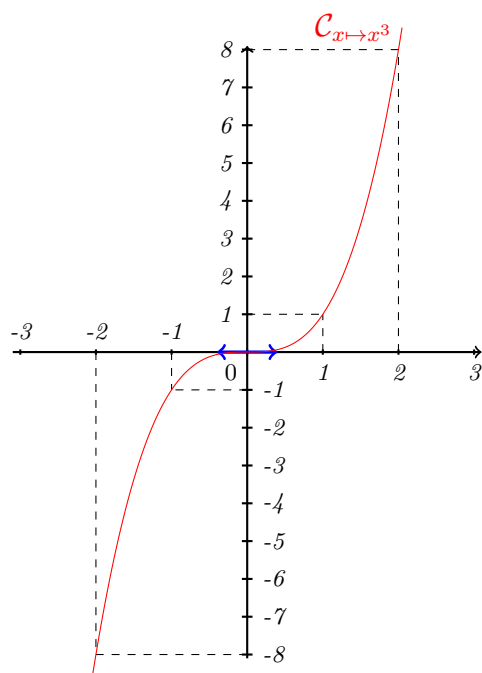
Pour avoir une intuition sur les objets mathématiques que l'on rencontre, il est indispensable d'avoir une représentation mentale de ces objets. C'est notamment le cas des fonctions réelles usuelles, dont il faut connaître le graphe.

Exercice 33. Tracer les courbes représentant les fonctions précisées à chaque fois.

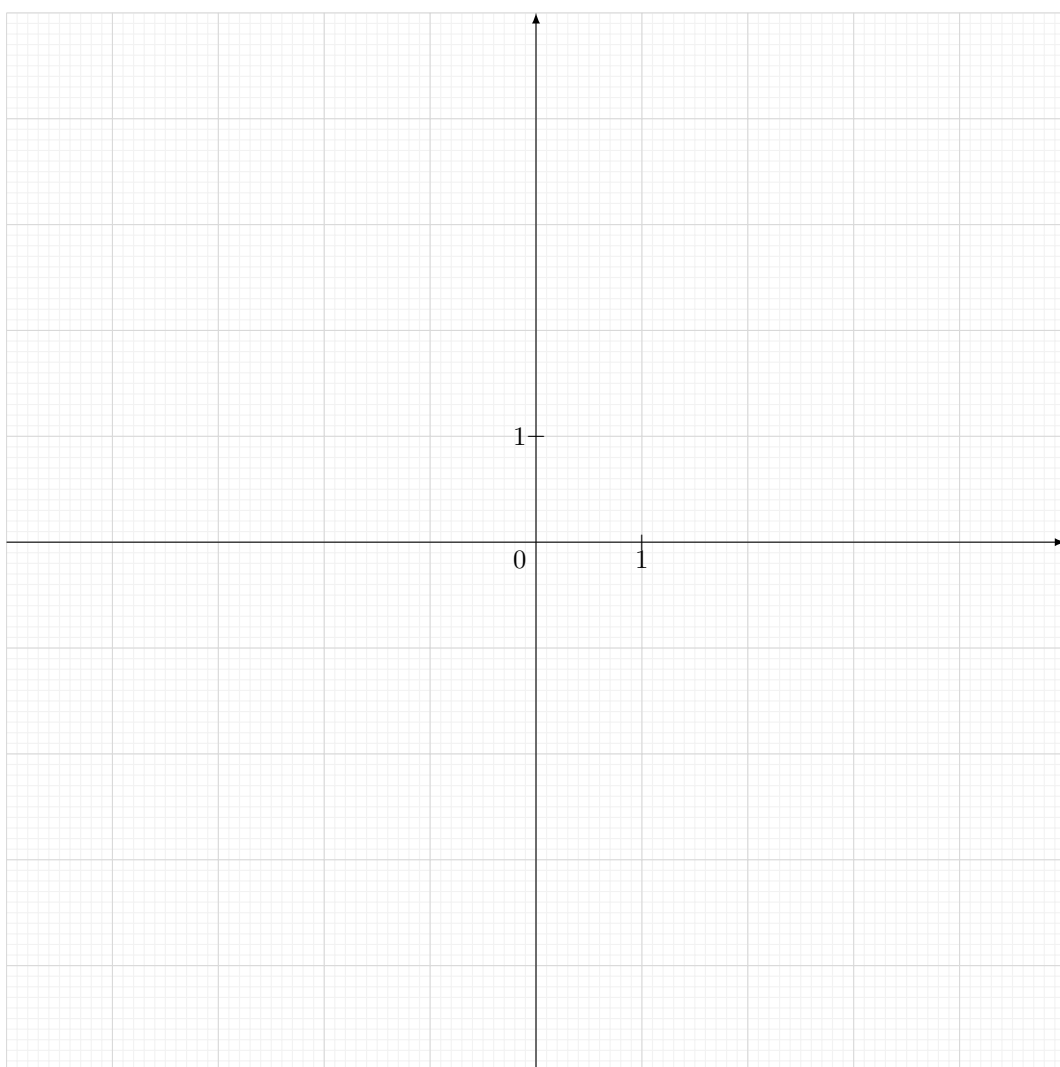
- Soigner le tracé.
- Utiliser une couleur différente par courbe si vous les représentez sur le même graphique.
- Indiquer les valeurs remarquables.
- Indiquer les tangentes horizontales ou verticales.
- Indiquer les asymptotes (ce qui n'est pas la même chose que les tangentes).

Par exemple, pour la fonction cube, on s'attendrait à voir un graphique comme celui qui suit.

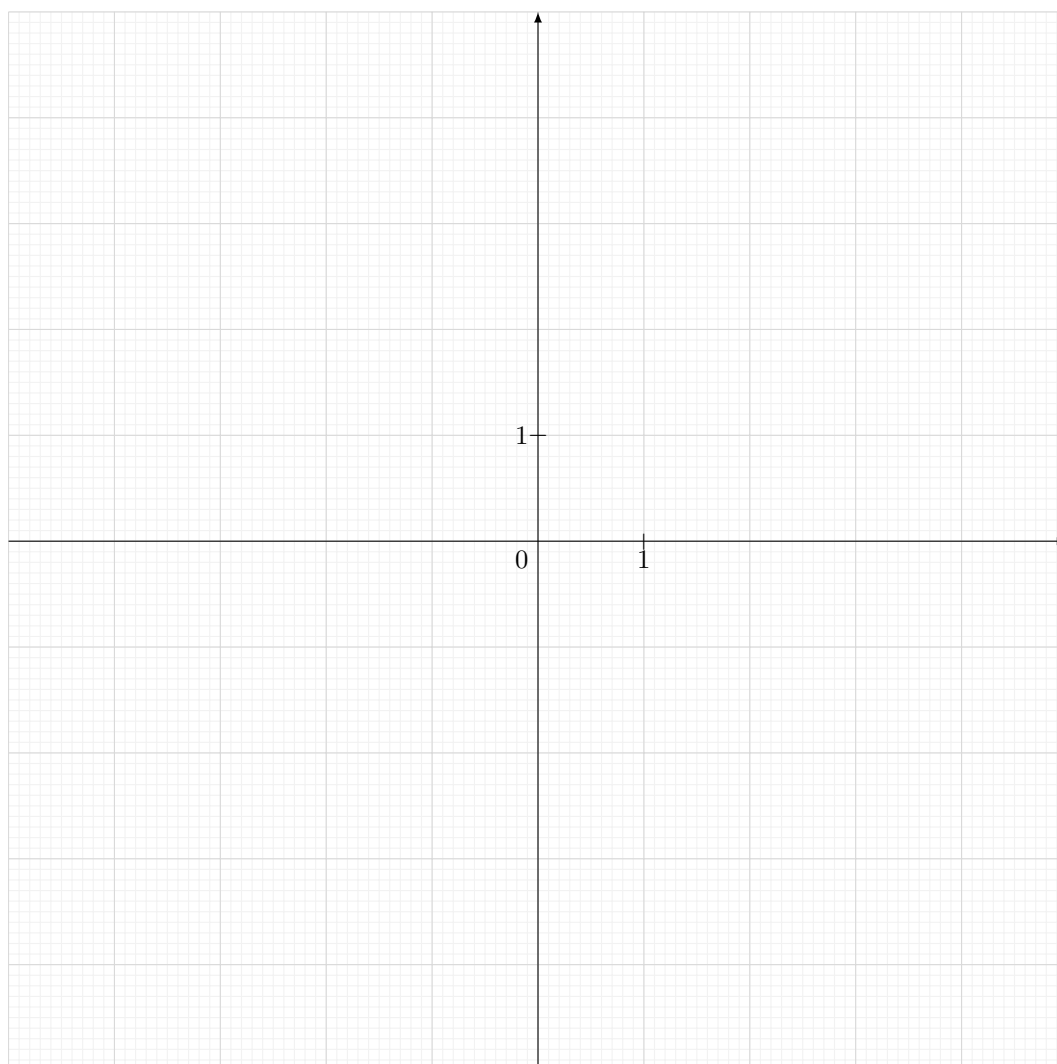
Les pointillés servent à mettre en évidence des valeurs remarquables. La flèche bleue au niveau de l'origine indique que la courbe a une tangente horizontale à cet endroit.



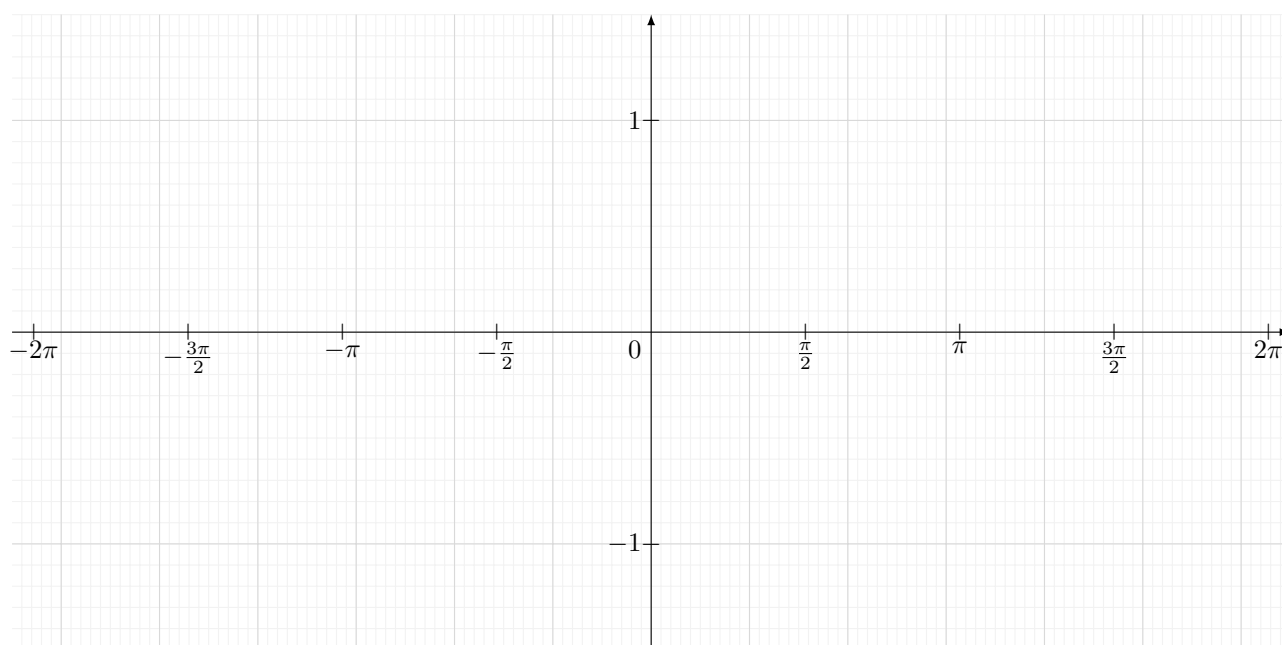
Tracés des fonctions carré, racine carrée et inverse (avec des couleurs différentes)



Tracés de exponentielle et logarithme népérien (avec des couleurs différentes)



Tracés de cosinus et sinus (avec des couleurs différentes)



X Python

Python est un langage de programmation impératif, qui sera utilisé dans le cours d'informatique tronc commun (ITC), ainsi que dans les cours de Physique, Chimie et de Sciences Industrielles de l'Ingénieur. L'objectif de cette partie est de revenir sur ce qui a déjà été abordé au lycée, afin de consolider votre maîtrise des bases du langage. Vous pouvez utiliser la version de Python 3.7 ou supérieure, soit depuis votre ordinateur, soit depuis <https://console.basthon.fr/>.

Si vous rencontrez un problème sur cette partie (que ce soit pour l'exécution du code ou bien pour répondre à une question posée), vous pouvez directement nous contacter à cette adresse : maxence.miguelbrebion@gmail.com.

X.1 Variables, boucles et scripts

Le script Python suivant permet de définir des variables puis d'effectuer des calculs simples à partir de ces dernières :

SCRIPT PYTHON

```
x = 2 # on affecte la valeur à droite (ici 2) à la variable à gauche (ici x)
y = 3

somme = x + y
produit = x * y # toutes les opérations doivent être écrites, xy est un autre nom de
variable
puissance = x**y
print(somme, produit, puissance) # on affiche des résultats

x = 12 # on change la valeur affectée à la variable x
```

Il existe différents types de variables en Python. Nous rencontrerons principalement

- des entiers (3, 1, -5, ...),
- des réels (3.25, -6.1, 5/2, ...),
- des chaînes de caractères ("coucou", "a", ...),
- et des booléens (True, False, 1==2, ...).

Un autre type sera présenté plus loin dans ce document.

Certaines tâches complexes peuvent enfin être simplifiées à l'aide de boucles, qui permettent d'effectuer plusieurs opérations à la suite sans avoir à décrire explicitement toutes les étapes d'un calcul.

Ainsi, le script ci-contre permet de calculer la somme des entiers de 0 à 9 inclus :

SCRIPT PYTHON

```
somme = 0
n=10
for i in range(n): # boucle sur les
entiers de 0 à n-1
    somme = somme + i # on met à jours la
variable somme

print(somme)
```

Python utilise l'indentation pour savoir quelle partie du code doit être répétée dans la boucle. Il faudra donc être particulièrement vigilant à ce propos lors de l'écriture de code. Il est aussi possible d'effectuer une ou plusieurs opérations en fonction d'un résultat donné. Cela se rédige de la manière suivante en Python :

SCRIPT PYTHON

```
a = 13
b = 0
if a>9:
    # ce code est exécuté uniquement si a>9, ce qui est bien le cas ici.
    b = a+1
else :
    # ce code est exécuté seulement si le précédent ne l'a pas été, ce qui ne sera pas le
cas ici.
    b = 11

print(b)
```

Ainsi, le script proposé va effectuer différentes opérations suivant la valeur de **a**. Notez bien qu'à l'instar des boucles **for**, il convient d'ajouter le caractère **:** à la fin de la ligne ainsi que d'indenter la suite correctement.

Les questions suivantes peuvent être résolues à l'aide de script Python de cinq lignes ou moins. Les réponses attendues étant fournies, vous **devez** vérifier que votre code est fonctionnel; c'est à dire qu'il s'exécute sans erreur Python et qu'il renvoie bien le résultat attendu

Exercice 34.

On considère le script ci-contre.

1. Essayez de prédire ce qui sera affiché par la commande **print** puis exécutez le script (réécrivez le pour vous habituer, pas de copier-coller).
Le résultat obtenu est-il bien conforme à votre intuition ?

SCRIPT PYTHON

```
x = 12
y = 13
# on intervertit ?
y = x
x = y
print(x,y)
```

La syntaxe python pour la puissance est ****** : **2**3** est 2 puissance 3

1. Calculez la somme des carrés des entiers de 0 à 20 (inclus). Le résultat attendu est 2870
2. Calculez la somme des cube des entiers de 0 à 5 (inclus). Le résultat attendu est 225
3. (Plus compliqué) Calculez la somme des carrés des entiers pairs de 0 à 20 (inclus). On rappelle que **a % 2** renvoie **True** si **a** est pair et **False** si **a** est impair. Le résultat attendu est 1540 et votre script doit comporter un **if**.

X.2 Fonctions

Lorsqu'une partie d'un programme est amenée à être appliquée plusieurs fois sur différentes variables, il est utile d'utiliser une fonction. Cette dernière peut prendre en entrée autant de variables que vous le souhaitez, effectuer des calculs à partir de ces dernières, puis renvoyer un unique résultat.

Ainsi, la fonction permettant trouver la plus grande solution d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ où **a**, **b** et **c** sont trois entiers tels que $b^2 > 4ac$, peut s'écrire en Python :

SCRIPT PYTHON

```
from math import * # pour pouvoir utiliser la fonction racine carrée sqrt()
# on déclare la fonction à l'aide de "def".
# a,b,c sont trois entiers. Cependant, au moment d'écrire la fonction, ils n'ont pas de
valeurs.
# Ces dernières seront déterminées lors de l'appel de la fonction, à la ligne 20

def resolution(a,b,c):
    """
    a,b et c sont les coefficients entiers d'une équation du
    second degré. Cette fonction renvoie la plus grande des solutions associées
    """
    delta = b**2 - 4*a*c

    if delta<=0:
        print("il y a un probleme !")

    x = (-b + sqrt(delta)) / (2*a) # formule pour la plus grande des racines
    return x

# on peut ensuite tester la fonction sur l'équation x^2 + 3 x + 2 = 0 qui admet comme
# plus grande solution (-3 + sqrt(9-8)) / 2 = -1
x = resolution(1,3,2)
print(x) # on attend -1
```

Il est de plus possible d'utiliser plusieurs **return** par fonction. Cependant, n'oubliez pas que dès que Python rencontre un **return**, il renvoie quelque chose puis il quitte immédiatement la fonction, même s'il reste encore du code non lu.

Exercice 35.

1. Saisissez le code précédent (pas de copier-coller !) et vérifiez que le résultat obtenu est bien -1 .
2. Modifiez le code précédent pour obtenir la plus petite solution (et non la plus grande). La réponse attendue est -2 .
3. On considère la suite (u_n) définie par la relation $u_n = 3n^2 - 3n + 1$. Écrivez alors la fonction `suiteU(n)` qui prend en entrée un entier n et qui renvoie le $n^{\text{ième}}$ élément de la suite. Testez ensuite votre fonction pour différentes valeurs de n .
4. On considère la suite (v_n) définie par la relation de récurrence $v_{n+1} = f(v_n) = \frac{1}{2} \left(v_n + \frac{a}{v_n} \right)$ avec $a \in \mathbb{R}^{+*}$.
 - (a) Écrivez une fonction `recur(v,a)` qui prend en entrée deux réels v et a et qui renvoie la valeur de $f(v) = \frac{1}{2}(v + a/v)$.
 - (b) Écrivez ensuite une fonction `suiteV(n,a,v0)` qui prend en entier un entier n , un réel a et un autre réel strictement positif $v0$ (la valeur initiale de la suite (v_n) pour $n = 0$) et qui renvoie la valeur de v_n . Cette fonction devra contenir une boucle `for` et appeler plusieurs fois la fonction `recur`.
 - (c) Testez cette dernière avec $n = 3$, $a = 2$ et $v0 = 1$. La réponse attendue est 1,4142156862745097. **Vérifiez bien qu'au moins les 8 premiers chiffres après la virgule sont identiques.**
 - (d) Testez à nouveau cette fonction, avec les mêmes valeurs pour a et $v0$ mais en prenant $n = 10$. A quel nombre "connu" le résultat obtenu vous fait-il penser ? Sans changer n et $v0$, prenez $a = 9$ et recalculez v_n ; le résultat attendu doit être très proche de 3.
 - (e) (Bonus, non trivial) : En admettant que la suite (v_n) converge vers une limite notée l , prouvez mathématiquement que $l = \sqrt{a}$.

Remarque :

En Python (comme en maths), il ne faut pas confondre `resolution`, qui est une fonction et `resolution(1,3,2)` qui est du même type que ce qui se trouve derrière le `return` soit un réel dans notre exemple.

X.3 Listes

Comme beaucoup d'autres langages, Python permet de stocker de nombreuses données dans une liste. Les syntaxes associées aux listes sont rappelées dans le script suivant :

SCRIPT PYTHON

```
premiereListe = [1.0, 2.7, 4.0, 12.3] # les données sont séparées par des virgules
# et encadrées par des crochets

deuxiemeListe = ["a", 128, True]
# une liste peut contenir des données de différents types

#On peut accéder à un élément de la manière suivante :
print(premiereListe[2]) # on affiche l'élément d'indice 2

#On peut modifier un élément d'une liste comme suit :
premiereListe[0] = "coucou"
print(premiereListe) # on remarque que l'élément d'indice 0 a bien changé !

#Finalement, on peut ajouter un élément à la suite d'une liste selon :
deuxiemeListe.append("nouvelElement")
print(deuxiemeListe) # un nouvel élément est bien apparu !

# une autre syntaxe permet aussi d'ajouter un (ou plusieurs) élément(s) à une liste :
troisiemeListe = deuxiemeListe + [3,4]
print(troisiemeListe) # on observe la mise bout à bout (on parle de concaténation) de
# deuxiemeListe et de la liste [3,4]

print(len(troisiemeListe)) # renvoie le nombre d'élément dans troisiemeListe.
```

Attention, le premier indice d'une liste vaut 0 en Python. Cela implique que `L[0]` retourne le premier élément de la liste `L` puis que `L[5] = 444` modifie son sixième élément.

On peut finalement effectuer un traitement sur l'ensemble des éléments d'une liste à l'aide d'une boucle. Voici deux exemples de syntaxes :

SCRIPT PYTHON

```
L = [4,9,3,2,6,3,5]
somme = 0 # on souhaite calculer la somme
          des éléments de L
for val in L:
    # val vaudra tour à tour L[0], L[1],
    ...
    somme = somme + val
print(somme)
```

SCRIPT PYTHON

```
L = [4,9,3,2,6,3,5]

for i in range(len(L)):
    # cette fois i vaut les
    indices (et non plus les
    valeurs)
    # ce script ne marcherait pas
    pareil avec la boucle for
    val in L précédente
    L[i] = L[i]**2

print(L)
```

Script mystère

Exercice 36.

1. Exécutez le premier script de la partie X.3. Vérifiez alors que les quatre `print` produisent bien les résultats attendus.
2. Prédisez ce que doit renvoyer le script mystère. Vérifiez ensuite en exécutant le script.
3. En vous appuyant sur le code associé à la question 3 de la partie X.2. Ecrire un script qui va stocker dans une liste nommée `us` les 20 premières valeurs de la suite (u_n) .