

INTERROGATION N°33

Pensez à introduire vos variables (-0,5pt pour chaque variable non introduite). Pour un théorème, séparer clairement les hypothèses et la conclusion (1pt pour chaque).

Exercice 33.1 (10pts). 1. Donner la définition de système complet d'événements sur un univers Ω .

2. Donner la définition de variable aléatoire sur un univers Ω .

3. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ (avec les x_i deux à deux distincts). Quel est le système complet d'événements associé X ?

4. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Définir la loi conjointe du couple (X, Y) .

5. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Compléter :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) =$$

Dans ce contexte, comment est qualifiée la loi de X ?

6. Soit E un événement de probabilité non nulle d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Soit A un événement. Définir la probabilité conditionnelle de A sachant E .

7. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Énoncer la formule des probabilités composées avec les événements $A_1, \dots, A_n$.

8. Énoncer la formule des probabilités totales.

9. Énoncer la formule de Bayes pour deux événements.

10. Soit X et Y deux variables aléatoires d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que X et Y soient indépendantes avec $\mathbb{P}(X = x)$ et $\mathbb{P}(Y = y)$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.