Interrogation n°29

Dans cette interrogation, $n, p \in \mathbf{N}^\star$, E, F et G sont des espaces vectoriels de dimension finie.

Exercice 29.1 (*10pts*). **1.** Si $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ (resp. $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$) est une base de E (resp. F) et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, recopier l'égalité ci-après en remplaçant les ? par ce qu'il faut.

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} ? & ? & \dots & ? \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{matrix} ? \\ ? \\ \vdots \\ ? \end{matrix} \end{array}$$

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $u \in E$, $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Donner la formule qui permet de calculer la matrice de $u(x)$ dans la base $\mathcal{B}_F$ à partir de la matrice de l'application u entre les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

3. Quelle est la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$?

4. Notons $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$ des bases respectives de E, F et G. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F), v \in \mathcal{L}(F, G)$. Donner la formule permettant d'obtenir la matrice de $v \circ u$ (entre les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$) à partir des matrices de u (entre les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$) et de v (entre les bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$).

5. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Donner l'application linéaire canoniquement associée à A.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Définir le noyau de A.

7. Définir la matrice de passage entre deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

8. Donner la formule de changement de bases pour les matrices.