

# INTERROGATION N°24

Dans cette interrogation,  $\mathbf{K}$  est un ensemble égal à  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Soit  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

**Exercice 24.1 (7pts).** 1. Définir «  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  ».

2. Donner une caractérisation de «  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  ».

3. Donner la définition de «  $(e_1, \dots, e_p)$  est une famille libre ».

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $(e_1)$  soit une famille libre.

5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $(e_1, e_2)$  soit une famille libre.

6. La famille  $(e_1, e_2, 0)$  est-elle libre ou liée ?

7. La famille  $(e_1, e_2, e_1 + e_2)$  est-elle libre ou liée ?

**Exercice 24.2 (4pts).** 1. Soit  $x \in E$ . On suppose que  $(e_1, \dots, e_p)$  est libre. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $(e_1, \dots, e_p, x)$  soit encore libre.

2. Soit  $x \in E$ . On suppose que  $(e_1, \dots, e_p, x)$  est génératrice. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $(e_1, \dots, e_p)$  soit encore génératrice.

3. Définir «  $(e_1, \dots, e_p)$  est génératrice de  $E$  ».

4. Donner la définition de base.