Interrogation n°10

Exercice 10.1 (3pts). **1.** Soit $(p, q) \in \mathbf{R}^2$.

(a) Soit $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ distincts. On note $f : x \longmapsto \dfrac{px+q}{(x-x_1)(x-x_2)}$. Compléter la formule de décomposition en éléments simples suivante :

$$\exists A, B \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R}\setminus\{x_1, x_2\},\quad f(x) =$$

(b) Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On note $g : x \longmapsto \dfrac{px+q}{(x-x_0)^2}$. Compléter la formule de décomposition en éléments simples suivante :

$$\exists A, B \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R}\setminus\{x_0\},\quad g(x) =$$

2. On pose $g : x \longmapsto \dfrac{x+2}{(x-1)^2}$. Soit $x \in \mathbf{R}\setminus\{1\}$. Donner la décomposition en éléments simples de $g(x)$.

Exercice 10.2 (4pts). Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit a, b deux fonctions définies et continues sur I. On considère l'équation

$$(E) : \quad y' + ay = b.$$

1. Donner l'équation homogène associée à (E).

2. Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E).

3. Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ et b_1, b_2 deux fonctions continues. On note φ_1 une solution de $(F_1) : y' + ay = b_1$ et φ_2 une solution de $(F_2) : y' + ay = b_2$. Donner une solution de l'équation différentielle

$$(F) : \quad y' + ay = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2.$$

Exercice 10.3 (3pts). Soit $a, b \in \mathbf{C}$,

$$(E) : \quad y'' + ay' + b' = 0.$$

1. Donner l'équation caractéristique associée à (E) (vous pourrez notée r l'inconnue de l'équation).

2. Si le polynôme caractéristique admet une unique solution r_0, donner l'ensemble des solutions de (E).

3. Si le polynôme caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, donner l'ensemble des solutions de (E).