Devoir Facultatif

Diagonalisabilité des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et variables aléatoires

Partie A. Diagonalisabilité des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. On note $\chi_A = \det(XI_2 - A)$. On admet que χ_A est un polynôme de degré 2.

1. On suppose que le polynôme χ_A possède deux racines distinctes λ et μ (on ne demande pas de les calculer).

- **(a)** Montrer que $\mathrm{Ker}(\lambda I_2 - A)$ et $\mathrm{Ker}(\mu I_2 - A)$ ne sont pas réduit à $\{0\}$.
- **(b)** Montrer que $\mathrm{Ker}(\lambda I_2 - A) \oplus \mathrm{Ker}(\mu I_2 - A) = \mathrm{Ker}(\lambda I_2 - A) + \mathrm{Ker}(\mu I_2 - A)$.
- **(c)** En déduire que $\mathrm{Ker}(\lambda I_2 - A) \oplus \mathrm{Ker}(\mu I_2 - A) = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.
- **(d)** On note (e_1) une base de $\mathrm{Ker}(\lambda I_2 - A)$ et (e_2) une base de $\mathrm{Ker}(\mu I_2 - A)$. Justifier que (e_1, e_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.
- **(e)** Montrer qu'il existe une matrice diagonale D, que vous expliciterez, et une matrice P telle que $A = PDP^{-1}$.

2. On suppose que le polynôme χ_A ne possède pas de racine réelle. On veut montrer par l'absurde que A n'est pas semblable à une matrice diagonale. On suppose donc qu'il existe une matrice $D = \mathrm{diag}(\lambda, \mu)$ semblable à A. Il existe donc une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ telle que $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi_A) = D$ (où φ_A est l'endomorphisme canoniquement associé à A).

- **(a)** Montrer que $\mathrm{Ker}(\lambda I_2 - A) \neq \{0\}$.
- **(b)** Conclure.

3. On suppose que le polynôme χ_A possède une racine double λ.

- **(a)** Montrer que si A est semblable à une matrice diagonale, alors $\dim(\mathrm{Ker}(\lambda I_2 - A)) = 2$.
- **(b)** On suppose que $\dim(\mathrm{Ker}(\lambda I_2 - A)) = 1$. La matrice A est-elle semblable à une matrice diagonale ?
- **(c)** On suppose que $\dim(\mathrm{Ker}(\lambda I_2 - A)) = 2$. La matrice A est-elle semblable à une matrice diagonale ?

4. **Application**. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice diagonale que vous expliciterez.

Partie B. Application avec des variables aléatoires (oral CCINP 2021)

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}.$$

5. En développant de deux manières $(1+X)^{2n}$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

6. En déduire la probabilité que A soit semblable à une matrice diagonale.

Partie C. Une autre application avec des variables aléatoires (oral IMT 2024)

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi $\mathscr{U}(\llbracket -1, 1 \rrbracket)$. On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & X \\ -1 & Y \end{pmatrix}$$

7. Déterminer la loi de $Z = \dim(\mathrm{Ker}(A))$.

8. Calculer la probabilité que la matrice A soit semblable à une matrice diagonale.