Devoir Facultatif

Noyaux itérés et matrices nilpotentes

Veillez à soigner la présentation et la rédaction. En particulier, pensez à introduire les variables utilisées et à $\boxed{\text{encadrer}}$ les résultats importants ainsi que les conclusions. Aucune abréviation ne doit apparaître dans la copie. Faites un usage raisonné des symboles logiques.
Chaque copie doit être numérotée (il faut aussi reporter le nombre total de pages) et le numéro de la question traitée doit apparaître clairement. Il faut rédiger vos réponses sur une copie double, en laissant une marge suffisante au correcteur.

Partie A. Noyaux itérés

On considère un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $f^0 = \mathrm{Id}_E$, et pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$, $f^k = f \circ f^{k-1}$.

1. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, on a $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$.

2. Montrer que s'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})$, alors $\mathrm{Ker}(f^{k+2}) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f(\mathrm{Ker}(f^k)) \subset \mathrm{Ker}(f^k)$.

4. Montrer que s'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k+1})$, alors $\mathrm{Im}(f^{k+1}) = \mathrm{Im}(f^{k+2})$.

5. Montrer que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) \iff \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

6. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

Partie B. Matrices nilpotentes, étude d'un cas particulier (exercice d'oral de Mines-Ponts 2025)

Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbf{C})$ et $k \in \mathbf{N}^\star$ tel que $A^k = 0$.

7. Montrer qu'il existe un unique $p \in \mathbf{N}^\star$ tel que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$

8. Montrer que $p \leqslant 4$.

9. On suppose $p = 4$. Montrer que A est semblable à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Indication : vous pourrez considérer la famille (X, AX, A^2X, A^3X) et montrer que c'est une base.

Partie C. Matrices nilpotentes, cas général

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices semblables à une triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale. On note aussi $\mathcal{M}'$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ vérifiant $M^p = 0$. L'objectif de ce problème est de montrer que $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$.

10. **(a)** Pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$, on note

$$\mathcal{S}_k = \left\{ (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \,\middle|\, \forall i,j \in [\![1,n]\!],\ j - i < k \implies a_{i,j} = 0 \right\}.$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$ et pour tout couple $(M, N) \in \mathcal{S}_k \times \mathcal{S}_1$, $MN \in \mathcal{S}_{k+1}$.

(b) En déduire que $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{M}'$ puis que $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$.

11. Soit $M \in \mathcal{M}'$. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à M.

(a) Justifier qu'il existe $p \in \mathbf{N}^\star$ tel que $u^p = 0$ et $u^{p+1} \neq 0$.

(b) Justifier, en utilisant la partie **A.**, que pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, $\mathrm{Ker}(u^i)$ est strictement inclus dans $\mathrm{Ker}(u^{i+1})$.

(c) On note pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, S_i un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u^{i-1})$ dans $\mathrm{Ker}(u^i)$ et $d_i = \dim(S_i)$. Justifier que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $d_i > 0$.

(d) On note pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $(e_{1,i}, \ldots, e_{d_i,i})$ une base de S_i. Montrer que la concaténation de ces bases est une base de $\mathbf{R}^n$.

(e) Conclure.