Devoir Facultatif

Formule de Stirling

Veillez à soigner la présentation et la rédaction. En particulier, pensez à introduire les variables utilisées et à $\boxed{\text{encadrer}}$ les résultats importants ainsi que les conclusions. Aucune abréviation ne doit apparaître dans la copie. Faites un usage raisonné des symboles logiques.
Chaque copie doit être numérotée (il faut aussi reporter le nombre total de pages) et le numéro de la question traitée doit apparaître clairement. Il faut rédiger vos réponses sur une copie double, en laissant une marge suffisante au correcteur.

Partie A. Formule de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, \mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0, W_1 et W_2.

2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \geqslant 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

4. **(a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $W_{2n+2} \leqslant W_{2n+1} \leqslant W_{2n}$.

(b) En déduire la formule de Wallis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Partie B. Formule de Stirling

Pour tout entier naturel non nul n, on note $u_n = \left(\dfrac{\mathrm{e}}{n}\right)^n \dfrac{n!}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

5. **(a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $v_n = 1 - \left(n + \dfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

(b) En déduire un équivalent de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$.

(c) Montrer que la suite $(n^2 v_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ converge et préciser sa limite.

6. Justifier que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est majorée.

7. **(a)** Montrer que la suite $((\ln(u_n))_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est décroissante à partir d'un certain rang.
*On pourra utiliser la question **5.**.*

(b) Exprimer le terme général de la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbf{N}^\star}$ en fonction d'une somme de termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ et en déduire que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est bornée.

(c) Montrer l'existence d'un réel strictement positif C tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}$.

8. Démontrer la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$