

Devoir Facultatif

Résolution générale des équations différentielles linéaires à coefficients constants

Veillez à soigner la présentation et la rédaction. En particulier, pensez à introduire les variables utilisées et à encadrer les résultats importants ainsi que les conclusions. Aucune abréviation ne doit apparaître dans la copie. Faites un usage raisonné des symboles logiques.

Chaque copie doit être numérotée (il faut aussi reporter le nombre total de pages) et le numéro de la question traitée doit apparaître clairement. Il faut rédiger vos réponses sur une copie double, en laissant une marge suffisante au correcteur.

On s'intéresse dans ce problème aux équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants :

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{C}$. Le polynôme $a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ est appelé le polynôme caractéristique d'une telle équation. Vous avez vu au premier semestre que l'ensemble des solutions dépend de la forme scindée du polynôme caractéristique pour $n \in \{1, 2\}$. Nous allons dans ce problème généraliser ces résultats.

Pour tout $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbf{C}[X]$, on note S_P l'ensemble des solutions de l'équation $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Par exemple :

$$S_{X^2 - X + 2} = \{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \mid y'' - y' + 2y = 0\}$$

Pour tous $r \in \mathbf{C}$ et $P \in \mathbf{C}[X]$, on note $e_r : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ et \tilde{P} la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$ de \mathbf{R} dans \mathbf{C} .

On note $D(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ l'ensemble des fonctions de \mathbf{R} dans \mathbf{C} , dérivables. On rappelle que pour tout $f \in D(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, f est constante si et seulement si f' est la fonction nulle.

Dernière remarque. Les espaces vectoriels manipulés dans ce problème sont tous des \mathbf{C} -espaces vectoriels.

Partie A - Premières observations, premiers exemples

1. Montrer que S_P est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ pour tout $P \in \mathbf{C}[X]$.
2. Montrer que $S_{X-r} = \text{Vect}(e_r)$ pour tout $r \in \mathbf{C}$. On pourra au choix utiliser les résultats connus sur les équations différentielles, ou dériver une fonction de la forme ye_{-r} pour voir ce que cela donne.
3. Montrer que S_{X^2-3X+2} contient S_{X-1} et S_{X-2} , puis que $S_{X^2-3X+2} = S_{X-1} \oplus S_{X-2}$.
4. Montrer que la famille $(x \mapsto x^k e^{rx})_{k \in \mathbf{N}}$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ est libre pour tout $r \in \mathbf{C}$.
5. Soient $P \in \mathbf{C}[X]$ et $r \in \mathbf{C}$.
 - (a) Montrer que pour tout $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$: $y \in S_{(X-r)P} \iff y' - ry \in S_P$.
 - (b) Montrer que S_P est stable par dérivation, puis que $S_P \subset S_{(X-r)P}$.

On peut alors montrer par récurrence (mais on ne vous demande pas de le faire!) que $S_P \subset S_Q$ pour tous $P, Q \in \mathbf{C}$ pour lesquels P divise Q . On admet ce résultat dans la suite.

Partie B - Cas général

On pose $E_r = \{x \mapsto Q(x)e^{rx} \mid Q \in \mathbf{C}[X]\} = \{\tilde{Q}e_r \mid Q \in \mathbf{C}[X]\}$ pour tout $r \in \mathbf{C}$.

6. Montrer que E_r est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ pour tout $r \in \mathbf{C}$.

La définition de deux sous-espaces vectoriels en somme directe a été vue en cours. Par extension, on dit que des sous-espaces F_1, \dots, F_p (avec $p \geq 1$) sont en somme directe lorsque tout vecteur de $F_1 + \dots + F_p$ se décompose de manière unique en somme de vecteurs de F_1, \dots, F_p , ce que l'on peut aussi écrire :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \forall (x'_1, \dots, x'_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \left[x_1 + \dots + x_p = x'_1 + \dots + x'_p \implies \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i = x'_i \right]$$

Il est alors facile de voir que cette condition est équivalente à la suivante (analogue de la caractérisation présente dans le cours) :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \quad \left[x_1 + \dots + x_p = 0 \implies \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i = 0 \right]$$

7. On souhaite montrer par récurrence que E_{r_1}, \dots, E_{r_p} sont en somme directe pour tous $r_1, \dots, r_p \in \mathbf{C}$ distincts.

(a) Initialisation : Montrer le résultat pour $p = 1$.

(b) Hérédité : Soit $p \geq 2$. On suppose le résultat vrai au rang $p-1$. Soient $r_1, \dots, r_p \in \mathbf{C}$ distincts et $Q_1, \dots, Q_p \in \mathbf{C}[X]$. On suppose que $\tilde{Q}_1 e_{r_1} + \dots + \tilde{Q}_p e_{r_p} = 0$.

Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$: $(Q'_k + r_k Q_k) Q_p = (Q'_p + r_p Q_p) Q_k$, puis conclure.

8. Montrer par récurrence que pour tous $k \in \mathbf{N}^*$ et $r \in \mathbf{C}$: $S_{(X-r)^k} = \left\{ \tilde{Q} e_r \mid Q \in \mathbf{C}_{k-1}[X] \right\}$.

9. Soient $r, u \in \mathbf{C}$ distincts et $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer que : $\forall f \in S_{(X-u)^k}, \exists y \in S_{(X-r)^k}, y' - ry = f$.

On pourra montrer que la résolution de $y' - ry = f$ avec $y \in S_{(X-u)^k}$ se ramène à la résolution d'une équation polynomiale, elle-même équivalente à un système triangulaire.

10. (a) Montrer par récurrence sur n que pour tout $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré $n \geq 1$:

$$S_P \subset S_{(X-r_1)^{m_1}} + \dots + S_{(X-r_s)^{m_s}}$$

où l'on note r_1, \dots, r_s les racines distinctes de P et m_1, \dots, m_s leurs multiplicités respectives. Étant donnée une fonction $y \in S_P$, on pourra s'intéresser à la fonction $y' - r_1 y$ et exploiter le résultat de la question 9).

(b) Que vaut la dimension de S_P pour tout $P \in \mathbf{C}[X]$ non nul ? Déterminer une base de $S_{(X-1)(X+2)^3}$.