Devoir Facultatif

Théorème de Cesàro et application à l'étude d'une série

Veillez à soigner la présentation et la rédaction. En particulier, pensez à introduire les variables utilisées et à $\boxed{\text{encadrer}}$ les résultats importants ainsi que les conclusions. Aucune abréviation ne doit apparaître dans la copie. Faites un usage raisonné des symboles logiques.
Chaque copie doit être numérotée (il faut aussi reporter le nombre total de pages) et le numéro de la question traitée doit apparaître clairement. Il faut rédiger vos réponses sur une copie double, en laissant une marge suffisante au correcteur.

Partie A. Théorème de Cesàro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

On veut montrer que si la suite u converge vers un réel ℓ, alors v converge aussi vers ℓ. Ce résultat est connu sous le nom de **théorème de Cesàro**.

1. Calculer le terme général v_n de la suite v et déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ dans les cas suivants :
  - **(a)** La suite u a pour terme général $u_n = a$, où $a \in \mathbf{C}$.
  - **(b)** La suite u a pour terme général $u_n = n$.
  - **(c)** La suite u a pour terme général $u_n = \cos(n\theta)$, où $\theta \in \,]0\,;\pi[$.

2. Dans cette question uniquement, on suppose que la suite u converge vers 0. On fixe un réel $\varepsilon > 0$.
  - **(a)** Montrer qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait :
$$\left|\frac{u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n}{n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
  - **(b)** Montrer qu'il existe un rang $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, on ait :
$$\left|\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_0-1}}{n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
  - **(c)** Démontrer que la suite v converge vers 0.

3. En déduire que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ converge aussi vers ℓ.

4. La réciproque est-elle vraie ?

Partie B. Une application (adapté d'un oral de Mines-Ponts)

Soit $u_0 \in \,]0\,;\pi[$. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite convergente et déterminer sa limite.

6. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

7. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ puis celle de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

8.
  - **(a)** Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on note $a_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$. Déterminer la limite de $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$.
  - **(b)** À l'aide du théorème de Cesàro, donner un équivalent de u_n.