Devoir Facultatif

Calcul de la constante de Néper par une somme

Veillez à soigner la présentation et la rédaction. En particulier, pensez à introduire les variables utilisées et à $\boxed{\text{encadrer}}$ les résultats importants ainsi que les conclusions. Aucune abréviation ne doit apparaître dans la copie. Faites un usage raisonné des symboles logiques.
Chaque copie doit être numérotée (il faut aussi reporter le nombre total de pages) et le numéro de la question traitée doit apparaître clairement. Il faut rédiger vos réponses sur une copie double, en laissant une marge suffisante au correcteur.

À tout entier naturel $n \geqslant 1$ on associe la fonction numérique f_n définie sur l'intervalle $I = [1\,;\,+\infty[$ par

$$\forall x \in I\,,\quad f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{x^2}.$$

On pose pour tous $n \in \mathbf{N}^\star$, $x \in I$: $I_n(x) = \displaystyle\int_1^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

- **(a)** Étudier les variations de f_n.
- **(b)** Vérifier que la valeur maximale de f_n sur I est $y_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$.
- **(c)** Calculer pour $x > 1$, $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$.
- **(d)** Montrer que $y_{n+1} = \dfrac{1}{2}f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)$ puis que $y_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}y_n$.
- **(e)** Quelle est la limite de la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$?

  On pourra commencer par montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $0 \leqslant y_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} y_1$.

2. **(a)** Soit $x \in I$, calculer $I_1(x)$.

- **(b)** Démontrer que

$$\forall x \in I\,, \forall k \in \mathbf{N}^\star,\quad I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{1}{(k+1)!}\frac{(\ln x)^{k+1}}{x}$$

- **(c)** En déduire que

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\quad I_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(\ln x)^k}{k!x}$$

3. Soit $x \in I$.

- **(a)** Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $0 \leqslant I_n(x) \leqslant (x-1)y_n$
- **(b)** En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(x)$.

4. Pour $n \geqslant 1$ et $x \in I$ on pose $w_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(\ln x)^k}{k!}$

- **(a)** Exprimer $w_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$.
- **(b)** Pour $x \in I$ fixé, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n(x)$.
- **(c)** En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall n \geqslant 1\,,\qquad S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$