

Devoir Facultatif

Résolution d'une équation différentielle non linéaire

Veillez à soigner la présentation et la rédaction. En particulier, pensez à introduire les variables utilisées et à encadrer les résultats importants ainsi que les conclusions. Aucune abréviation ne doit apparaître dans la copie. Faites un usage raisonné des symboles logiques.

Chaque copie doit être numérotée (il faut aussi reporter le nombre total de pages) et le numéro de la question traitée doit apparaître clairement. Il faut rédiger vos réponses sur une copie double, en laissant une marge suffisante au correcteur.

On cherche à résoudre l'équation différentielle non-linéaire :

$$(E) : \quad xy' - 2|y| = x \quad \text{sur } I =]0, +\infty[.$$

1. (a) Résoudre l'équation différentielle (E_-) : $xy' - 2y = x$ sur I .
 (b) Montrer qu'aucune des solutions de (E_-) n'est strictement positive sur tout l'intervalle I .
2. (a) Résoudre l'équation différentielle (E_+) : $xy' + 2y = x$ sur I .
 (b) Montrer qu'aucune des solutions de (E_+) n'est strictement négative sur tout l'intervalle I .
3. Que déduit-on de des questions précédentes quant aux solutions de (E) ?
4. On note f_0 une solution de (E) .
 (a) Montrer que f_0 est strictement croissante sur I .
 (b) Montrer qu'il existe un réel $x_0 > 0$ tel que $f_0(x_0) = 0$.
 (c) Montrer que :

$$\forall x \in]0, x_0], \quad f_0(x) = \frac{x^3 - x_0^3}{3x^2} \quad \text{et} \quad \forall x \in [x_0, +\infty[, \quad f_0(x) = \frac{x^2}{x_0} - x.$$

- (d) Conclure sur l'ensemble des solutions de (E) .
5. On s'intéresse désormais à la solution f_0 pour $x_0 = 1$.
 (a) Que vaut $f_0'(1)$?
 (b) Déterminer les limites de f_0 en 0 et en $+\infty$ et la limite de $\frac{f_0(x)}{x}$ en $+\infty$.
 (c) Déterminer f_0'' et préciser son signe.
 (d) Représenter f_0 dans un repère orthonormé en tenant compte de tous les éléments précédents. On tiendra notamment compte de la concavité ou convexité de f_0 sur les différents intervalles.