

# Devoir Facultatif

## Méthode de Newton

Veillez à soigner la présentation et la rédaction. En particulier, pensez à introduire les variables utilisées et à encadrer les résultats importants ainsi que les conclusions. Aucune abréviation ne doit apparaître dans la copie. Faites un usage raisonné des symboles logiques.

Chaque copie doit être numérotée (il faut aussi reporter le nombre total de pages) et le numéro de la question traitée doit apparaître clairement. Il faut rédiger vos réponses sur une copie double, en laissant une marge suffisante au correcteur.

Ce problème présente la méthode de Newton, qui est une méthode performante de résolution numérique d'équations.

### Partie 1. Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2

On considère deux réels distincts  $\alpha$  et  $\beta$ , on note  $I$  le segment d'extrémités  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $\overset{\circ}{I}$  l'intervalle ouvert d'extrémités  $\alpha$  et  $\beta$ , et on donne  $f$  une application de  $I$  dans  $\mathbf{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^2$ .

On se propose de montrer l'existence d'un réel  $\gamma$ , élément de  $\overset{\circ}{I}$ , et tel que

$$f(\beta) = f(\alpha) + (\beta - \alpha)f'(\alpha) + \frac{(\beta - \alpha)^2}{2}f''(\gamma).$$

1. On pose  $A = \frac{f(\beta) - f(\alpha) - (\beta - \alpha)f'(\alpha)}{\frac{(\beta - \alpha)^2}{2}}$  et l'on définit l'application  $\varphi$  sur  $I$  par :

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) = f(t) - f(\alpha) - (t - \alpha)f'(\alpha) - \frac{A}{2}(t - \alpha)^2.$$

Montrer l'existence de  $\delta \in \overset{\circ}{I}$  tel que  $\varphi'(\delta) = 0$ .

2. Établir le résultat annoncé.

### Partie 2. Description et évaluation de la méthode de Newton

Dans toute la suite du problème, on considère  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f$  une application de  $[a, b]$  dans  $\mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , telle que  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$  et  $f'$  ne s'annule jamais.

3. (a) Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $[a, b]$ .  
 (b) Montrer que  $f$  s'annule une unique fois, et ce en un élément  $r$  de  $]a, b[$ .
4. Montrer que  $f'$  admet un minorant  $m$  strictement positif, et que  $f''$  admet un majorant  $M$ .
5. On considère  $r_0 \in [a, b] \setminus \{r\}$ , et l'on suppose que l'on peut définir une suite d'éléments de  $[a, b] \setminus \{r\}$  de la façon suivante : pour tout entier naturel  $n$ ,  $r_{n+1}$  est l'abscisse du point d'intersection de la tangente  $\Delta_n$  au graphe de  $f$  en son point d'abscisse  $r_n$  avec l'axe des abscisses du repère.
- (a) Faire un dessin.  
 (b) Calculer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $r_{n+1}$  en fonction de  $r_n$ .  
 (c) Pour tout entier naturel  $n$ , montrer l'existence d'un réel  $c_n \in ]a, b[$  tel que  $|r_{n+1} - r| = \frac{(r - r_n)^2}{2f'(r_n)} |f''(c_n)|$ .  
 (d) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $|r_{n+1} - r| \leq \frac{M}{2m}(r_n - r)^2$ .
6. On définit la suite  $v$  par  $v_0 = b - a$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = \frac{M}{2m}v_n^2$ .
- (a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = \left(\frac{M}{2m}\right)^{2^n - 1} (b - a)^{2^n}$ .  
 (b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $|r_n - r| \leq v_n$ .

- (c) Lorsque  $\frac{M}{2m}(b-a) < 1$ , montrer que la suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $r$ .
7. (a) Expliquer comment utiliser ce qui précède pour obtenir une valeur approchée de  $r$  de précision arbitraire. Pourquoi doit-on partir d'une valeur de  $r_0$  « pas trop éloignée de  $r$  » pour que la méthode fonctionne ? Comment obtenir une telle valeur ? Que dire de la vitesse de convergence de la méthode de Newton ?
- (b) Exemple numérique en Python.
- i. Montrer que l'équation  $x^3 + x - 1 = 0$  admet une solution réelle, que l'on notera  $r$ . Écrire un script Python pour obtenir par dichotomie une valeur approchée de  $r$  à  $10^{-1}$  près.
  - ii. Mettre en œuvre la méthode de Newton pour obtenir une valeur approchée de  $r$  à  $10^{-15}$  près.