Devoir Facultatif

Valeur absolue de la trace comme génératrice de certaines semi-normes

Veillez à soigner la présentation et la rédaction. En particulier, pensez à introduire les variables utilisées et à encadrer les résultats importants ainsi que les conclusions. Aucune abréviation ne doit apparaître dans la copie. Faites un usage raisonné des symboles logiques.
Chaque copie doit être numérotée (il faut aussi reporter le nombre total de pages) et le numéro de la question traitée doit apparaître clairement. Il faut rédiger vos réponses sur une copie double, en laissant une marge suffisante au correcteur.

Dans tout ce devoir, n désignera un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on appellera **trace** de $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ le réel $\operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$.

Partie 1. Quelques propriétés générales de la trace

Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $N = (n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer que $\operatorname{tr}(\lambda M) = \lambda \operatorname{tr}(M)$.

2. Montrer que $\operatorname{tr}(M+N) = \operatorname{tr}(M) + \operatorname{tr}(N)$.

3. **(a)** Montrer que $\operatorname{tr}(MN) = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{\ell,k} n_{k,\ell}$.

(b) Montrer que $\operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM)$.

Partie 2. Semi-normes et trace

On notera dans cette partie $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la i-ième ligne et de la j-ième colonne, qui est égal à 1.

On rappelle que $\forall i,j,k,\ell \in [\![1,n]\!]$, $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$.

Une application q de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}_+$ est dite une **semi-norme** sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ si elle vérifie :

- $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $q(\lambda M) = |\lambda|\, q(M)$.
- $\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $q(M+N) \leqslant q(M) + q(N)$.

On dit qu'une semi-norme q sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ si : $\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $q(MN) = q(NM)$.

4. Soit q une semi-norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

(a) Montrer que $q(O) = 0$, où O est la matrice nulle.

(b) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $q(-M) = q(M)$.

(c) Montrer que pour tous $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $|q(M) - q(N)| \leqslant q(M+N)$.

(d) Montrer que pour tous $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, si $q(N) = 0$ alors $q(M+N) = q(M)$.

5. On considère pour toute la suite l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ M & \longmapsto & |\operatorname{tr}(M)| \end{array}$$

Montrer que f est une semi-norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.

6. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que

$$A = \sum_{j=1}^{n} E_{1,j} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i} \quad \text{et} \quad B = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h E_{h,1}.$$

(a) Montrer que $AB = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\right) E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i E_{i,1}$.

(b) Montrer que $BA = \sum_{h=1}^{n}\left(\alpha_h \sum_{j=1}^{n} E_{h,j}\right)$.

7. Soit q une semi-norme vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

(a) Montrer que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, si $i \neq j$ alors $q(E_{i,j}) = 0$. On pourra utiliser le fait que $E_{i,j} = E_{i,i}E_{i,j}$.

(b) En déduire que $q\left(\sum_{i=2}^{n} m_{i,1}E_{i,1}\right) = 0$.

(c) Vérifier que $q(M) = q\left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}E_{i,i}\right)$.

(d) Montrer, en prenant des valeurs précises pour $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ qui définissent la matrice B, que $q(M) = q(BA)$.

(e) Montrer qu'il existe un réel positif α tel que $q = \alpha f$.