

Devoir Facultatif

Étude de suites récurrentes

Veillez à soigner la présentation et la rédaction. En particulier, pensez à introduire les variables utilisées et à encadrer les résultats importants ainsi que les conclusions. Aucune abréviation ne doit apparaître dans la copie. Faites un usage raisonné des symboles logiques.

Chaque copie doit être numérotée (il faut aussi reporter le nombre total de pages) et le numéro de la question traitée doit apparaître clairement. Il faut rédiger vos réponses sur une copie double, en laissant une marge suffisante au correcteur.

Dans cet exercice, on considère l'ensemble, noté \mathcal{S} , des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ à valeurs réelles et telles que

$$u_{n+1} = \frac{\exp(u_n)}{n+1}$$

pour tout entier $n \geq 0$.

Pour tout nombre réel x , on note $u(x)$ la suite appartenant à \mathcal{S} et dont le premier terme vaut x . On note également $u_n(x)$ le terme d'indice n de cette suite. Ainsi, $u_0(x) = x$ et $u_1(x) = \exp(x)$.

1. Démontrer que toute suite appartenant à \mathcal{S} est strictement positive à partir du rang 1 .
2. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite appartenant à \mathcal{S} . Démontrer que s'il existe un rang $N \geq 2$ pour lequel $u_N \leq 1$, alors $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0 .
3. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite appartenant à \mathcal{S} . Démontrer que si cette suite ne converge pas vers 0, alors elle diverge vers $+\infty$.

On note pour la suite E_0 l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $u(x)$ converge vers 0 , et E_∞ l'ensemble des réels x pour lesquels $u(x)$ diverge vers $+\infty$.

4. Démontrer que $0 \in E_0$.
5. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est strictement croissante sur \mathbf{R} .
(b) En déduire que si x est un élément de E_0 , alors l'intervalle $]-\infty; x]$ est inclus dans E_0 .
6. (a) Démontrer que la fonction $x \mapsto \exp(x) - x(x+1)$ est strictement positive sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
(b) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite appartenant à \mathcal{S} . Démontrer que s'il existe un rang $N \geq 1$ pour lequel $u_N \geq N+1$, alors $(u_n)_{n \geq 0}$ diverge vers $+\infty$.
(c) Démontrer que $1 \in E_\infty$.
7. Démontrer que si x est un élément de E_∞ , alors l'intervalle $[x; +\infty[$ est inclus dans E_∞ .

Nous allons maintenant démontrer qu'il existe un nombre réel δ tel que l'intervalle $]-\infty; \delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $[\delta; +\infty[$ est inclus dans E_∞ .

8. On définit deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ par $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} & \text{et} & b_{n+1} = b_n & \text{si } \frac{a_n + b_n}{2} \in E_0 \\ a_{n+1} = a_n & \text{et} & b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) Démontrer que les suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ sont convergentes et ont la même limite.
- (b) Soit δ la limite commune aux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$. Démontrer que l'intervalle $]-\infty; \delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $[\delta; +\infty[$ est inclus dans E_∞ .
9. On pose $c_2 = \ln(\ln(2))$, $c_3 = \ln(\ln(2 \ln(3)))$ et $c_4 = \ln(\ln(2 \ln(3 \ln(4))))$, et plus généralement, pour tout entier $\ell \geq 2$, $c_\ell = \ln(\ln(2 \ln(3 \ln(\dots \ln((\ell-1) \ln(\ell)) \dots)))$.
Démontrer que, pour tout entier $\ell \geq 2$, le nombre réel c_ℓ appartient à E_0 . (On pourra calculer $u_\ell(c_\ell)$)
10. Démontrer que la suite $(c_\ell)_{\ell \geq 2}$ est croissante et en déduire qu'elle converge.
11. Démontrer que $\delta \in E_\infty$.