Devoir Facultatif

Autour des suites strictement croissantes

Veillez à soigner la présentation et la rédaction. En particulier, pensez à introduire les variables utilisées et à encadrer les résultats importants ainsi que les conclusions. Aucune abréviation ne doit apparaître dans la copie. Faites un usage raisonné des symboles logiques.
Chaque copie doit être numérotée (il faut aussi reporter le nombre total de pages) et le numéro de la question traitée doit apparaître clairement. Il faut rédiger vos réponses sur une copie double, en laissant une marge suffisante au correcteur.

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Partie 1. Suites à variation bornée

On dit qu'une suite réelle u est à *variation bornée* s'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ strictement croissantes et majorées telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = a_n - b_n.$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ u_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{2n} = 0.$$

L'objectif de cette partie est de montrer par l'absurde que u n'est pas à variation bornée. On suppose donc (par l'absurde) qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ strictement croissantes et majorée telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = a_n - b_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ a_{2n+1} > a_{2n} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N},\ a_{2n} \geqslant 2\sqrt{n+1} + a_0 - 2$ et conclure.

Partie 2. Suites logarithmiques

On va étudier dans cette partie des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ vérifiant

$$(\bigstar) \quad \forall n, m \in \mathbf{N}^\star,\ u_{nm} = u_n + u_m.$$

L'objectif principal de cette partie est de montrer qu'une suite strictement croissante u vérifiant $(\bigstar)$ est de la forme $(\lambda \ln(n))_{n\in\mathbf{N}^\star}$ pour un certain $\lambda \in \mathbf{R}_+^\star$.

Pour toute cette partie, on fixe une suite u strictement croissante vérifiant $(\bigstar)$.

4. Soit $p \geqslant 2$ un entier. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u_{p^k} = u_p k$ et que $u_p > 0$.
5. **(a)** Montrer que $\forall x, y \in \mathbf{R},\ x < y \implies]x\,;\,y[\cap \mathbf{Q} \neq \varnothing$.

   (b) Soit $a, b \in \mathbf{R}_+^\star$. Montrer que si
   $$\forall k, \ell \in \mathbf{N}^\star,\ \frac{k}{\ell} \leqslant a \implies \frac{k}{\ell} \leqslant b$$
   alors $a \leqslant b$. Vous pourrez raisonner par contraposition.

   (c) Soit $a, b \in \mathbf{R}_+^\star$ vérifiant
   $$\forall k, \ell \in \mathbf{N}^\star,\ \frac{k}{\ell} \leqslant a \iff \frac{k}{\ell} \leqslant b.$$
   Que peut-on déduire de la question précédente sur a et b ?
6. On se donne maintenant deux entiers $p, q \geqslant 2$. Montrer que $\dfrac{u_p}{u_q} = \dfrac{\ln(p)}{\ln(q)}$.
7. Déduire de ce qui précède l'existence de $\lambda \in \mathbf{R}_+^\star$ telle que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star} = (\lambda \ln(n))_{n\in\mathbf{N}^\star}$.