Savez-vous faire ? 37 - Espaces préhilbertiens réels

Kit de survie du cours

Dans tout ce chapitre, E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

Produit scalaire

Définition 37.1 (*Produit scalaire*). On appelle **produit scalaire** sur E toute application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$ vérifiant :

1. **Symétrie** : pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
2. **Bilinéarité** : pour tout $e \in E$, $x \longmapsto \varphi(x, e)$ et $x \longmapsto \varphi(e, x)$ sont linéaires, c'est-à-dire
$$\forall (x, y, z) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \varphi(\lambda x + z, y) = \lambda\varphi(x, y) + \varphi(z, y),$$
$$\forall (x, y, z) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \varphi(x, \lambda y + z) = \lambda\varphi(x, y) + \varphi(x, z).$$
3. **Positivité** : pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geqslant 0$.
4. **Séparation** (ou **définie positivité**) : pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) = 0 \iff x = 0$.

Remarque 37.2. Pour montrer la bilinéarité d'un produit scalaire on ne montre qu'une seule des deux propriétés de la définition. L'autre s'en déduit par symétrie.

Définition 37.3 (*Espace préhilbertien, espace euclidien*). Si E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un **espace préhilbertien réel**. Si de plus E est de dimension finie, on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un **espace euclidien**.

Exemple 37.4 (♥, *produit scalaire canonique dans* $\mathbf{R}^n$). Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Si $X \in \mathbf{R}^n$, on notera $(x_1, \dots, x_n)$ ses coordonnées dans $\mathbf{R}^n$. Alors
$$\begin{array}{rccl} \langle \cdot, \cdot \rangle : & \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & (X, Y) & \longmapsto & X^\top Y = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array}$$
est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$ est appelé **produit scalaire canonique**.

Définition 37.5 (*Norme euclidienne*). Pour $x \in E$, on appelle **norme euclidienne** de x associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note $\|x\|$ le réel $\sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Définition 37.6 (*Vecteur unitaire*). Un élément x de E est dit **unitaire** lorsque $\|x\| = 1$.

Proposition 37.7 - Premières propriétés de la norme euclidienne.

1. **Séparation**. Pour tout $x \in E$, $\|x\| \geqslant 0$ et $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$.
2. **Homogénéité**. Pour tout $x \in E$ et pour tout réel λ, $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.

Théorème 37.8 - Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour $x, y \in E$,
$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \times \|y\|$$
avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Proposition 37.9 - Inégalités triangulaires.

Soit $(x, y) \in E^2$.

1. Première inégalité triangulaire. $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$.
2. Cas d'égalité. $\|x+y\|=\|x\|+\|y\| \Longleftrightarrow \exists \alpha \geqslant 0,\ x=\alpha y$ ou $\exists \alpha \geqslant 0,\ y=\alpha x$.
3. Seconde inégalité triangulaire. $\big|\|x\|-\|y\|\big| \leqslant \|x+y\|$.

Proposition 37.10 - Identités remarquables.

Soit $(x, y) \in E^2$.

1. $\|x+y\|^2=\|x\|^2+2\langle x, y\rangle+\|y\|^2$.
2. $\|x-y\|^2=\|x\|^2-2\langle x, y\rangle+\|y\|^2$.
3. $\langle x+y, x-y\rangle=\|x\|^2-\|y\|^2$.
4. **Identité de polarisation**. $\langle x, y\rangle=\dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$.

Orthogonalité

Définition 37.11 (*Vecteurs orthogonaux*). Soit $x, y \in E$. On dit que x et y sont orthogonaux lorsque $\langle x, y\rangle=0$. On note alors $x \perp y$.

Définition 37.12 (*Orthogonal d'une partie*). Soit X une partie de E. On appelle **orthogonal** de X et on note $X^{\perp}$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de X :

$$X^{\perp}=\{x \in E \mid \forall y \in X,\ x \perp y\}.$$

Proposition 37.13 - Orthogonal de l'espace entier.

On a $E^{\perp}=\{0_E\}$.

Théorème 37.14 - L'orthogonal est un sous-espace vectoriel.

Soit X une partie de E. Alors $X^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 37.15 - Caractérisation de l'orthogonalité à l'aide d'une famille génératrice finie.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F possède une famille génératrice finie $(u_1, \ldots, u_p)$. Alors pour tout $x \in E$,

$$x \in F^{\perp} \Longleftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad x \perp u_i.$$

Définition 37.16 (*Famille orthogonale, orthonormale*). Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que $(u_1, \ldots, u_p)$ est une **famille orthogonale** lorsque les vecteurs u_i sont deux à deux orthogonaux :

$$\forall(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad i \neq j \Longrightarrow u_i \perp u_j.$$

- On dit que $(u_1, \ldots, u_p)$ est une **famille orthonormale** lorsque les vecteurs u_i sont deux à deux orthogonaux et unitaires :
$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

Théorème 37.17 - Liberté pour une famille finie orthogonale, orthonormale.

Une famille de cardinal fini orthogonale ne comprenant pas 0_E est libre. En particulier, une famille orthonormale est une famille libre.

Théorème 37.18 - Propriété de Pythagore.

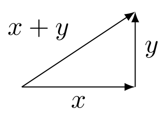
Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. Si la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est orthogonale, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2 .$$

Théorème 37.19 - Théorème de Pythagore.

Soit $x, y \in E$. Alors

$$x \perp y \Longleftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$



Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Lemme 37.20 - « Redressement » d'un vecteur pour le rendre orthogonal à d'autres.

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille orthonormale de E. Soit $x \in E$. Alors

$$x - \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle e_k \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_p)^{\perp} .$$

Présentation du problème. On suppose donnée une famille libre $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. On veut construire une famille orthonormale $(u_1, \ldots, u_n)$ de E pour laquelle pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_k) = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$.

Explication de la méthode pour trois vecteurs. On suppose donnée une famille libre (e_1, e_2, e_3). On va construire successivement u_1, u_2 puis u_3.

1. Construction de u_1. On pose $u_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ (on a bien $e_1 \neq 0$, sinon la famille (e_1, e_2, e_3) ne pourrait être libre). Ce choix convient puisque $\operatorname{Vect}(u_1) = \operatorname{Vect}(e_1)$ et $\|u_1\| = \left\| \dfrac{e_1}{\|e_1\|} \right\| = \dfrac{\|e_1\|}{\|e_1\|} = 1$.

2. Construction de u_2.
   - Redressement du vecteur e_2. Le vecteur $\hat{u}_2 = e_2 - \langle e_2, u_1 \rangle u_1$ est orthogonal à u_1 d'après le Lemme 37.20 (car la famille (u_1) est orthonormale).
   - Normalisation. Le vecteur $u_2 = \dfrac{\hat{u}_2}{\|\hat{u}_2\|} = \dfrac{e_2 - \langle e_2, u_1 \rangle u_1}{\|e_2 - \langle e_2, u_1 \rangle u_1\|}$ est normal.

   Puisque $u_1 \in \operatorname{Vect}(e_1)$, on a par construction $u_2 \in \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$.

3. Construction de u_3.

- Redressement du vecteur e_3. Le vecteur $\hat{u}_3 = e_3 - \langle e_3, u_1 \rangle u_1 - \langle e_3, u_2 \rangle u_2$ est orthogonal à u_1 et u_2 d'après le Lemme 37.20 (car la famille (u_1, u_2) est orthonormale).
- Normalisation. Le vecteur $u_3 = \dfrac{\hat{u}_3}{\|\hat{u}_3\|} = \dfrac{e_3 - \langle e_3, u_1 \rangle u_1 - \langle e_3, u_2 \rangle u_2}{\|e_3 - \langle e_3, u_1 \rangle u_1 - \langle e_3, u_2 \rangle u_2\|}$ est normal.

Puisque $u_2 \in \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$, on a par construction $u_3 \in \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3)$.

Théorème 37.21 - Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. Alors il existe une unique famille orthonormale $(u_1, \ldots, u_n)$ de E pour laquelle pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_k) = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$ et $\langle e_k, u_k \rangle > 0$.
Les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ peuvent être construits de proche en proche depuis u_1 jusqu'à u_n. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, si on a construit $u_1, \ldots, u_{k-1}$ et si on pose

$$\hat{u}_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i$$

alors $u_k = \dfrac{\hat{u}_k}{\|\hat{u}_k\|}$.
La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ obtenue est appelée l'**orthonormalisée** par le procédé de Gram-Schmidt de la famille $(e_1, \ldots, e_n)$.

Espaces euclidiens

Dans cette partie, E est un espace euclidien de dimension n non nulle.

Définition 37.22 (*Base orthonormale*). Une base de E est dite **orthonormale** si c'est une famille orthonormale.

Théorème 37.23 - Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n.

Pour tout vecteur x de E, on a $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$: cela signifie que les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ sont $\Big(\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \ldots, \langle x, e_n \rangle \Big)$.

Projection orthogonale sur un espace de dimension finie

Dans cette partie, E est un espace préhilbertien et V est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie non nulle.

Théorème 37.24 - Existence et unicité du supplémentaire orthogonal.

L'espace $V^\perp$ est un supplémentaire de V dans E orthogonal à V et c'est même le seul. On l'appelle le **supplémentaire orthogonal** de V dans E.

Corollaire 37.25 - Bi-orthogonal.

On a $V^{\perp\perp} = V$.

Corollaire 37.26 - Dimension de l'orthogonal en dimension finie.

Soit E un espace euclidien et V un sous-espace vectoriel de E. Alors

$$\dim(V^{\perp}) = \dim(E) - \dim(V).$$

Définition 37.27 (*Projection orthogonale*). On appelle **projection orthogonale** sur V ou **projecteur orthogonal** sur V la projection sur V de direction $V^{\perp}$.

Proposition 37.28 - Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.

Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base orthonormale de V. Soit $x \in E$. Notons $p(x)$ le projeté orthogonal de x sur V. Alors

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, v_k \rangle v_k.$$

Proposition 37.29 - Caractérisation de la projection orthogonale.

Soit $x, p(x) \in E$. Le vecteur $p(x)$ est le projeté orthogonal de x sur V si et seulement si

$$p(x) \in V \quad \text{et} \quad x - p(x) \in V^{\perp}.$$

Définition 37.30 (*Vecteur normal*). Soit E un espace euclidien de dimension non nulle et H un hyperplan de E. Le sous-espace $H^{\perp}$ est une droite vectorielle dont tout vecteur non nul est appelé un **vecteur normal à** H.

Proposition 37.31 - Projection sur un hyperplan.

Soit E un espace euclidien de dimension non nulle et H un hyperplan de E. Notons a un vecteur normal à H. Soit $x \in E$. Notons $p(x)$ le projeté orthogonal de x sur H. Alors

$$p(x) = x - \frac{\langle x, a \rangle a}{\|a\|^2}$$

ou encore $p(x) = x - \langle x, a \rangle a$ si a est unitaire.

Définition 37.32 (*Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie*). On appelle **distance** de x à V et on note $d(x, V)$ le réel :

$$d(x, V) = \min_{y \in V} \|x - y\|.$$

On a donc

$$d(x, V) = \|x - p_V(x)\|.$$

Méthodes et exercices à connaître

Montrer qu'une application est un produit scalaire

La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont souvent rapides. Il faut par contre détailler systématiquement la séparation. Voici quelques idées à retenir pour cela :

1. Une somme de nombres positifs est nulle si tous les nombres sont nuls.
2. Un polynôme de $\mathbf{K}_n[X]$ qui admet strictement plus de n racines est le polynôme nul.
3. Soit $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a \leqslant b$. Si $f : [a\,;\,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction positive et continue et que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors on peut en déduire que $f = 0$ sur $[a\,;\,b]$ (théorème de positivité de l'intégrale).
4. Soit $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a \leqslant b$. Si $f : [a\,;\,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue et que pour tout $x \in\,]a\,;\,b[$, $f(x) = 0$, alors on peut en déduire (grâce à la continuité de f) que pour tout $x \in [a\,;\,b]$, $f(x) = 0$.

- Résultats du cours : Définition 37.1, Remarque 37.2.
- Exercices ☕ : 37.1, 37.7, 37.10 (1), 37.11 (1), 37.16 (1), 37.18 (1)
- Exercices ☕☕ : 37.14 (3)
- Exercices ☕☕☕ :

Orthonormaliser une famille de vecteurs

Il faut connaître le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (Théorème 37.21). Le Lemme 37.20 est à comprendre, il permet de mieux retenir la méthode.

- Résultats du cours : Lemme 37.20, Théorème 37.21.
- Exercices ☕ : 37.7, 37.8, 37.9, 37.10 (2), 37.18 (2)
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ :

Déterminer l'orthogonal d'une partie

Il faut utiliser la Proposition 37.15. Si on demande par exemple l'orthogonal de $F = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)$ un sous-espace vectoriel de E, il faut se donner $x \in E$ quelconque puis commencer par écrire

$$x \in F^{\perp} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \langle x, f_1 \rangle & = & 0 \\ \langle x, f_2 \rangle & = & 0 \end{array} \right. \iff \dots$$

et continuer à travailler par équivalences. On se ramène systématiquement par équivalence à la résolution d'un système linéaire, qu'il reste à résoudre pour conclure.

- Résultats du cours : Proposition 37.15.
- Exercices ☕ : 37.11 (2)
- Exercices ☕☕ : 37.12
- Exercices ☕☕☕ : 37.13, 37.14 (6)

Déterminer l'expression d'une projection orthogonale

Dans le cas général, il y a essentiellement deux méthodes, plus ou moins calculatoires. Il y a un troisième résultat à retenir pour les projections sur un hyperplan.

1. Proposition 37.28. Si vous disposez déjà d'une base orthonormale, c'est la formule à appliquer. Si vous connaissez seulement une base, alors vous pouvez l'orthonormaliser avec Gram-Schmidt mais c'est alors assez long (dans ce cas la seconde méthode peut être intéressante).
2. Proposition 37.29. Utile quand on ne dispose pas déjà d'une base orthonormale.
3. Proposition 37.31. Cas particulier d'une projection sur un hyperplan.

- Résultats du cours : Proposition 37.28, Proposition 37.29, Proposition 37.31.
- Exercices ☕ : 37.15
- Exercices ☕☕ : 37.17, 37.19
- Exercices ☕☕☕ : 37.20

Trouver la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

La formule donnant la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie fait intervenir le projeté. Il faut donc toujours appliquer les méthodes de la section précédente pour d'abord trouver l'expression de la projection, puis ensuite utiliser la formule donnant la distance.

- Résultats du cours : Définition 37.32.
- Exercices ☕ : 37.18 (3)
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ :

Utiliser les égalités/inégalités sur la norme

Pour des exercices un peu plus abstraits. Il faut connaître les identités remarquables, l'égalité de polarisation et les inégalités triangulaires. Peut-être un peu moins important que le reste.

- Résultats du cours : Définition 37.5, Proposition 37.7, Théorème 37.8, Proposition 37.9, Proposition 37.10.
- Exercices ☕ : 37.3
- Exercices ☕☕ : 37.2
- Exercices ☕☕☕ :

Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Ces exercices ne sont pas toujours immédiats car il faut choisir un produit scalaire et deux vecteurs. Peut-être un peu moins important que le reste.

- Résultats du cours : Théorème 37.8
- Exercices ☕ :
- Exercices ☕☕ : 37.4, 37.6, 37.14 (5)
- Exercices ☕☕☕ : 37.5