Savez-vous faire ? 36 - Intégration sur un segment

Kit de survie du cours

Propriétés de l'intégrale

Définition 36.1 (*Notation* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$). Soit f une fonction continue sur un intervalle I, soit $a, b \in I$.

(a) Si $a < b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a\,;\,b]} f$. **(b)** Si $a = b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. **(c)** Si $a > b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{[b\,;\,a]} f$.

Proposition 36.2 - Linéarité de l'intégrale.

Soit f, g deux fonctions continues sur un intervalle I, $a, b \in I$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\ \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 36.3 - Positivité de l'intégrale.

Soit I un intervalle, f une fonction continue sur I et $a, b \in I$. Si les deux hypothèses suivantes sont vraies :

(a) $a \leqslant b$;

(b) f positive entre a et b.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Théorème 36.4 - Stricte positivité de l'intégrale.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a, b \in I$. Si les deux hypothèses suivantes sont vérifiées

(a) f de signe constant entre a et b ;

(b) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Alors $f = 0$ entre a et b.

On rappelle que le résultat précédent s'appelle « stricte positivité de l'intégrale » car sa contraposée stipule par exemple que

$$f \geqslant 0 \text{ et } f \neq 0 \implies \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

Proposition 36.5 - Croissance de l'intégrale.

Soit I un intervalle, f, g deux fonctions continues sur I et $a, b \in I$. Si les deux hypothèses suivantes sont vraies :

(a) $a \leqslant b$;

(b) $f \leqslant g$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 36.6 - Inégalité triangulaire.

Soit $a < b$. Pour toute fonction f continue sur $[a\,;\,b]$,

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 36.7 - Relation de Chasles.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a, b et c appartenant à I,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Sommes de Riemann

Théorème 36.8 - Convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale.

La suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des sommes de Riemann d'une fonction f continue sur $[a\,;\,b]$ converge vers l'intégrale de f sur $[a\,;\,b]$. Autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En particulier, pour toute fonction f continue sur le segment $[0\,;\,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Calcul intégral

Théorème 36.9 - Théorème fondamental de l'analyse.

Soit f une fonction continue de I dans $\mathbf{R}$ et a un point de I. La fonction F_a définie par :

$$\forall x \in I, \quad F_a(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

est une primitive de f sur I. C'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Corollaire 36.10 - Liens entre primitives et intégrales.

1. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives sur cet intervalle.
2. Soit f une fonction continue sur I, $a \in I$ et F une primitive de f sur I. Alors,
$$\forall x \in I, \quad \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$
3. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $a \in I$. Pour tout $x \in I$, $f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t$.

Théorème 36.11 - Formule d'intégration par parties.

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Pour tous a et b appartenant à I,

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x.$$

Théorème 36.12 - Formule de changement de variables.

Soit f une fonction continue sur un intervalle J non vide et non réduit à un point à valeurs dans $\mathbf{R}$. Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs dans J. Pour tous réels a et b éléments de I,

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\ \mathrm{d}y.$$

Proposition 36.13 - Parité et valeur moyenne d'une fonction sur un segment centré en 0.

Soit a un réel strictement positif et soit f une fonction réelle continue sur $[-a\,;\,a]$.

1. Si f est une fonction impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et donc la valeur moyenne de f sur $[-a\,;\,a]$ est nulle.
2. Si f est une fonction paire, alors
$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-a}^0 f(x)$$
et donc les valeurs moyennes de f sur $[-a\,;\,a]$, sur $[-a\,;\,0]$ et sur $[0\,;\,a]$ sont égales.

Proposition 36.14 - Intégrale d'une fonction périodique.

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ continue et périodique de période $T > 0$. Pour tous a, b réels, on a

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui signifie que l'intégrale de f sur tout segment de longueur T est la même. Une conséquence est que la valeur moyenne de f est aussi la même sur tout segment de longueur T.

Étude de fonctions définies à l'aide d'une intégrale

Méthode 36.15. *Déterminer le domaine de définition d'une fonction définie par une intégrale*

On considère deux fonctions u et v définies sur I et f une fonction continue. On s'intéresse à la fonction φ définie sur I par

$$\varphi : x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in I$. Pour montrer que $\varphi(x)$ existe, il suffit de vérifier que f est continue sur le segment d'extrémités $u(x)$ et $v(x)$.

En déterminant tous les $x \in I$ tels que $\varphi(x)$ existe, on obtient le domaine de définition de φ.

Méthode 36.16. *Montrer qu'une fonction définie par une intégrale est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée*

On considère deux fonctions u et v définies sur I et f une fonction continue. On s'intéresse à la fonction φ définie sur I par

$$\varphi : x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Puisque f est continue, elle admet une primitive F (en pratique on introduit F sans connaître son expression explicite). On a alors, pour tout $x \in I$.

$$\varphi(x) = \Big[F(x)\Big]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x)).$$

Si u et v sont dérivables sur I, comme F est dérivable aussi sur I (en tant que primitive), on obtient avec la formule de dérivation d'une composée,

$$\varphi'(x) = v'(x) \cdot F'(v(x)) - u'(x) \cdot F'(u(x))$$

donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = v'(x) \cdot f(v(x)) - u'(x) \cdot f(u(x))}$$

(cette relation est à retrouver à chaque fois que vous l'utilisez !!). Vous noterez bien que dans la relation précédente, il n'y a des x que sur les bornes de l'intervalle, et surtout pas dans l'intégrande !

On a toujours F de classe $\mathscr{C}^1$ en tant que primitive d'une fonction continue ($F' = f$ est continue). Si de plus u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$, alors φ est de classe $\mathscr{C}^1$.

Méthode 36.17. *Étudier la parité d'une fonction définie par une intégrale*

On considère deux fonctions u et v définies sur I un intervalle centré en 0 et f une fonction continue. On s'intéresse à la fonction φ définie sur I par

$$\varphi : x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour montrer que φ est paire (ou impaire), on pourra transformer $\varphi(-x)$ à l'aide du changement de variable $u = -t$.

Formules de Taylor

Théorème 36.18 - Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit $n \in \mathbf{N}$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. Pour tous réels a et b dans I,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Corollaire 36.19 - Formule de Taylor avec reste intégral en 0.

Soit I un intervalle contenant 0. Soit $n \in \mathbf{N}$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I.

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Théorème 36.20 - Inégalité de Taylor-Lagrange.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et $(a, b) \in I^2$. Si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur le segment d'extrémités a et b, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Corollaire 36.21 - Inégalité de Taylor-Lagrange en 0.

Soit I un intervalle contenant 0. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et $x \in I$. Si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur le segment d'extrémités 0 et x, alors

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| \leqslant M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Intégrale d'une fonction à valeurs complexes sur un segment

Définition 36.22 (*Intégrale d'une fonction à valeurs complexes sur un segment*). Soit $f = \mathfrak{Re}(f) + i\,\mathfrak{Im}(f)$ une fonction à valeurs complexes continue sur le segment $[a\,;b]$. On définit l'**intégrale** de f sur $[a\,;b]$ comme étant le nombre complexe défini par

$$\int_{[a\,;\,b]} f = \int_{[a\,;\,b]} \mathfrak{Re}(f) + i \int_{[a\,;\,b]} \mathfrak{Im}(f).$$

Méthodes et exercices à connaître

Utiliser la croissance et la stricte positivité de l'intégrale

Il est utile de connaître des inégalités pour beaucoup de théorème en analyse. Il vous faudra donc être capable de majorer/minorer des intégrales. Pour cela, la méthode est toujours la même, on majore/minore l'intégrande (l'expression « sous » l'intégrale), puis on utilise la croissance le l'intégrale en veillant bien à ce que les bornes soient dans le bon sens (c'est une très grande source d'erreur, surtout quand les bornes dépendent de x et qu'il faut distinguer des cas...).

Le théorème de stricte positivité de l'intégrale est à bien comprendre aussi, il est très souvent utile !

- Résultats du cours : Proposition 36.5, Théorème 36.6, Corollaire 36.10
- Exercices : 36.1, 36.3, 36.4
- Exercices : 36.2
- Exercices : 36.5, 36.6

Étudier une fonction définie à l'aide d'un intégrale

Il faut savoir établir des inégalités (cf. première section).

Pour les fonctions, les méthodes donnent tout ce qu'il faut savoir d'utile.

- Résultats du cours : Proposition 36.5, Théorème 36.6, Corollaire 36.10, Méthode 36.15, Méthode 36.16, Méthode 36.17
- Exercices : 36.11, 36.14 (1,2,3), 36.16, 36.17, 36.21
- Exercices : 36.13, 36.14 (4), 36.15, 36.20
- Exercices :

Étudier une suite définie par une intégrale

Il faut savoir établir des inégalités (cf. première section).

La remarque sur les inégalités faite dans la section précédente reste valable ici.

Pour les suites, il arrive parfois qu'on demande de démontrer une relation de récurrence. Cela ce fait presque toujours avec une intégration par parties.

- Résultats du cours : Proposition 36.5, Théorème 36.6, Théorème 36.11
- Exercices : 36.10, 36.12 (1), 36.18 (1,2,3,4), 36.19 (1,2,3)
- Exercices : 36.12 (2), 36.18 (5), 36.19 (4)
- Exercices :

Calculer des sommes de Riemann

- Résultats du cours : Théorème 36.8
- Exercices : 36.22 (1 à 7)
- Exercices : 36.11 (8, 9), 36.23, 36.24
- Exercices :

Utiliser les formules de Taylor

La reine des formules de Taylor est celle avec reste intégral, car elle donne une expression exacte du reste ! Si vous avez besoin d'une intégrale, Taylor-Lagrange est adaptée. Si vous avec besoin d'une limite, c'est Taylor-Young qu'il vous faut souvent.

- Résultats du cours : Théorème 36.18, Corollaire 36.19, Théorème 36.20, Corollaire 36.21
- Exercices ☕ : 36.7, 36.8, 36.11 (1)
- Exercices ☕☕ : 36.9
- Exercices ☕☕☕ :