Savez-vous faire ? 35 - Espérance et variance

Kit de survie du cours

Dans tout ce cours, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

Espérance d'une variable aléatoire réelle

Définition 35.1 (*Espérance*). Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

On appelle **espérance** de X et on note $\mathbb{E}(X)$ le réel défini par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x).$$

Définition 35.2 (*Variable aléatoire centrée*). Une variable aléatoire réelle d'espérance nulle est dite **centrée**.

Proposition 35.3 - Principales propriétés de l'espérance.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

1. **Linéarité**. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
2. **Positivité**. Si $X \geqslant 0$ alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
3. **Croissance**. Si $X \geqslant Y$, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y)$.
4. **Encadrement**. Si a et b sont deux réels tels que $a \leqslant X \leqslant b$, alors $a \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant b$.
5. **Inégalité triangulaire**. $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$.

Théorème 35.4 - Formule de transfert.

Soit X une variable aléatoire réelle. Soit g une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Alors :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X = x).$$

Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

Définition 35.5 (*Variance*). Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On appelle **variance** de X le réel, noté $\mathbb{V}(X)$, défini par $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))^2\Big)$.

Proposition 35.6 - Formule de Kœnig-Huygens.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2.$$

Proposition 35.7 - Principales propriétés de la variance.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

1. $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$.
2. Pour tous réels λ et μ, $\mathbb{V}(\lambda X) = \lambda^2 \mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(X + \mu) = \mathbb{V}(X)$.

Définition 35.8 (*Écart-type*). Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle **écart-type** de X le nombre réel noté $\sigma(X)$ et défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Proposition 35.9 - Principales opérations sur l'écart-type.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

1. $\sigma(X) \geqslant 0$.
2. Pour tous réels λ et μ, $\sigma(\lambda X) = |\lambda| \sigma(X)$ et $\sigma(X + \mu) = \sigma(X)$.

Corollaire 35.10 - Obtenir une variable aléatoire centée réduite.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Si $\sigma(X) \neq 0$, la variable aléatoire $Y = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.

Couples de variables aléatoires

Théorème 35.11 - Formule de transfert pour un couple de variables aléatoires.

Soit X et Y des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors,

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x,y) \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Définition 35.12 (*Covariance*). Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

On appelle **covariance** de X et Y le réel

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\Big].$$

Proposition 35.13 - Formule de Kœnig-Huygens pour la covariance.

Soit X et Y sont des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On a :

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Proposition 35.14 - Principales propriétés de la covariance.

Soit X et Y sont des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

1. **Symétrie**. $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$.
2. **Linéarité à gauche, à droite**. Pour tous $a, b \in \mathbf{R}$ et toutes variables aléatoires réelles X_1, X_2, Y_1, Y_2,

$$\text{Cov}(aX_1 + bX_2, Y) = a \cdot \text{Cov}(X_1, Y) + b \cdot \text{Cov}(X_2, Y)$$
$$\text{Cov}(X, aY_1 + bY_2) = a \cdot \text{Cov}(X, Y_1) + b \cdot \text{Cov}(X, Y_2)$$

3. **Positivité**. $\text{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X) \geqslant 0$.

Corollaire 35.15 - Variance d'une somme de v.a.r..

Soit X et Y sont des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y).$$

Proposition 35.16 - Somme de variables aléatoires décorrélées.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Si X et Y sont décorrélées alors $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Proposition 35.17 - Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et donc $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Corollaire 35.18 - Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Corollaire 35.19 - Espérance (variance) d'un produit (somme) de var indépendantes.

Soit X_1, X_2,... , X_n des variables aléatoires (mutuellement) indépendantes. Alors,

$$\mathbb{E}(X_1 X_2 \cdots X_n) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) \cdots \mathbb{E}(X_n)$$

et

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) + \cdots + \mathbb{V}(X_n).$$

Inégalités probabilistes

Proposition 35.20 - Inégalité de Markov.

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles. Pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Proposition 35.21 - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance m et d'écart-type σ. Pour tout $d > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - m| \geqslant d) \leqslant \frac{\sigma^2}{d^2}.$$

Résumé des propriétés à connaître sur les lois usuelles

Nom	**Param.**	**Notation**	**Situation d'apparition**	$X(\Omega)$ **contient**	$\mathbb{P}(X = k)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{V}(X)$
Uniforme	$n \in \mathbf{N}^\star$	$\mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$	Équiprobabilités des événements $(X = k)$	$\llbracket 1, n \rrbracket$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli	$p \in [0\,;\,1]$	$\mathscr{B}(p)$	Si X ne prend que les valeurs 0 et 1	$\{0, 1\}$	$\mathbb{P}(X = 1) = p$ $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1-p)$
Binomiale	$n \in \mathbf{N}^\star$, $p \in [0\,;\,1]$	$\mathscr{B}(n, p)$	Si une même expérience est répétée et que X compte « quelque chose » (qui sera le succès)	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$\binom{n}{p} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$

Méthodes et exercices à connaître

Calculer l'espérance ou la variance d'une variable aléatoire réelle

Il faut en premier lieu se demander si la variable aléatoire X qu'on considère suit une loi usuelle. Si c'est le cas, obtenir l'espérance ou la variance est immédiat avec les formules du cours.

Si la variable X est construite à partir d'une autre variable aléatoire dont on connaît l'espérance (resp. la variance), on peut utiliser des formules (formule de transfert, linéarité de l'espérance, variance d'une somme de variables aléatoires décorrélées, espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes etc.)

Sinon, pour calculer une espérance, on utilise la définition. Pour la variance, on n'utilise presque jamais la définition mais plutôt la formule de Kœnig-Huygens (après avoir calculé $\mathbb{E}(X^2)$ via la formule de transfert).

- Résultats du cours : Définition 35.1, Proposition 35.3, Théorème 35.4, Définition 35.5, Proposition 35.6, Proposition 35.7, Définition 35.8, Proposition 35.9, Corollaire 35.15, Proposition 35.16, Proposition 35.17, Corollaire 35.18, Corollaire 35.19
- Exercices ☕ : 35.1, 35.2, 35.3, 35.4, 35.5, 35.6, 35.15, 35.16, 35.17 (1)
- Exercices ☕☕ : 35.7, 35.11, 35.13, 35.14, 35.17 (2,3)
- Exercices ☕☕☕ : 35.8, 35.9, 35.10, 35.12

Calculer la covariance d'un couple de v.a.r.

En pratique, on utilise Kœnig-Huygens plutôt que la définition pour calculer une covariance.

- Résultats du cours : Théorème 35.11, Définition 35.12, Proposition 35.13, Proposition 35.14
- Exercices ☕ : 35.18, 35.19, 35.21
- Exercices ☕☕ : 35.20
- Exercices ☕☕☕ : 35.22

Manipuler les inégalités probabilistes

C'est très souvent Bienaymé-Tchebychev qu'il faut utiliser.

- Résultats du cours : Proposition 35.20, Proposition 35.21
- Exercices ☕ : 35.24
- Exercices ☕☕ : 35.23
- Exercices ☕☕☕ : 35.25