# Savez-vous faire ? 34 - Conditionnement et indépendance

## Kit de survie du cours

### Probabilités conditionnelles

**Définition 34.1 (*Probabilité conditionnelle d'un événement*).** Soit $E$ un événement de probabilité non nulle de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Pour tout événement $A$, on appelle **probabilité conditionnelle de** $A$ **sachant** $E$ et on note $\mathbb{P}_E(A)$ (ou $\mathbb{P}(A \mid E)$) le nombre

$$\mathbb{P}_E(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(E)}.$$

**Proposition 34.2 - Application probabilité conditionnelle.**

Soit $E$ un événement de probabilité non nulle de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
L'application $\mathbb{P}_E : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0\,;\,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}_E(A) \end{array}$ est une probabilité sur $\Omega$ appelée la probabilité conditionnelle sachant $E$.

**Corollaire 34.3.**

Soit $E$ un événement de probabilité non nulle, soit $A$ et $B$ deux événements de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

1. $\mathbb{P}_E(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}_E(A)$.
2. $\mathbb{P}_E(B \backslash A) = \mathbb{P}_E(B) - \mathbb{P}_E(A \cap B)$.
3. $\mathbb{P}_E(A \cup B) = \mathbb{P}_E(A) + \mathbb{P}_E(B) - \mathbb{P}_E(A \cap B)$.

**Proposition 34.4 - Formule des probabilités composées.**

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Si $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors les événements $A_1,\ A_1 \cap A_2,\ \dots,\ A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ sont de probabilité non nulle et

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

**Lemme 34.5 - Formule de filtration.**

Soit $\{E_1, \dots, E_n\}$ un système complet d'événements et $A$ un événement de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Alors

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap E_k).$$

**Théorème 34.6 - Formule des probabilités totales.**

Soit $\{E_1, \dots, E_n\}$ un système complet d'événements et $A$ un événement de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k)\mathbb{P}_{E_k}(A)$$

en adoptant la convention que le produit $\mathbb{P}(E_k)\mathbb{P}_{E_k}(A)$ vaut 0 si $\mathbb{P}(E_k) = 0$.

**Proposition 34.7 - Formule de Bayes.**

Soit $\{E_1, \dots, E_n\}$ un système complet d'événements et $A$ un événement de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, tous les événements étant de probabilité non nulle. On a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}_A(E_i) = \frac{\mathbb{P}(E_i)\mathbb{P}_{E_i}(A)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k)\mathbb{P}_{E_k}(A)}.$$

**Définition 34.8 (*Loi de probabilité conditionnellement à un événement*).** Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble $E$. Soit $B$ un événement de probabilité non nulle.

On appelle **loi de probabilité de $X$ sachant $B$**, la probabilité définie sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$ par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0\,;1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}_B(X \in A). \end{array}$$

## Indépendance

**Définition 34.9 (*Indépendance de deux événements*).** Soit $A$ et $B$ deux événements de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

On dit que les événements $A$ et $B$ sont **indépendants** lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

On note alors $A \perp\!\!\!\perp B$.

**Définition 34.10 (*Indépendance (mutuelle) de plusieurs événements*).** Soit $A_1$, $A_2$, $\dots$, $A_n$ des événements de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

On dit que les événements $A_1$, $A_2$, $\dots$, $A_n$ sont **(mutuellement) indépendants** lorsque, pour toute partie $I$ de $[\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

**Exemple 34.11 (♥).** Avec trois événements $A$, $B$ et $C$, ceux-ci sont mutuellement indépendants si, et seulement si,

$$\begin{array}{cc} \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) & \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) & \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) \end{array}$$

**Proposition 34.12 - Opérations sur des événements indépendants.**

Soit $A_1$, $A_2, \ldots,$ $A_n$ (où $n \geqslant 2$) des événements (mutuellement) indépendants de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

1. En remplaçant des $A_i$ par leur événement contraire, on obtient encore une famille d'événements (mutuellement) indépendants.
2. Chacun des $A_i$ est indépendant de tout événement $B$ qu'on peut former par intersections, réunions avec des événements $A_k$ où $k \neq i$ ou leur contraire.

**Définition 34.13 (*Variables aléatoires indépendantes*).** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

On dit que $X$ et $Y$ sont **indépendantes** lorsque,

$$\forall A \subset X(\Omega), \quad \forall B \subset Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(\{X \in A \text{ et } Y \in B\}) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

**Proposition 34.14 - Caractérisation des variables indépendantes.**

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Si pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y),$$

alors $X$ et $Y$ sont indépendantes.

**Définition 34.15 (*Indépendance (mutuelle) de plusieurs variables aléatoires*).** Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

On dit que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont **(mutuellement) indépendantes** lorsque pour tout $A_1 \in X_1(\Omega), \ldots, A_n \in X_n(\Omega)$, les événements $\{X_1 \in A_1\}, \ldots, \{X_n \in A_n\}$ sont (mutuellement) indépendants.

**Proposition 34.16 - Caractérisation de l'indépendance mutuelle de variables aléatoires.**

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont (mutuellement) indépendantes si et seulement si

$$\forall x_1 \in X_1(\Omega), \ldots, x_n \in X_n(\Omega), \quad \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

**Proposition 34.17 - Application de fonctions à des variables aléatoires indépendantes.**

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables (mutuellement) indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et $g_1, \ldots g_n$ des applications respectivement définies sur $X_1(\Omega), \ldots, X_n(\Omega)$.
Alors les variables aléatoires $g_1(X_1), \ldots, g_n(X_n)$ sont (mutuellement) indépendantes.

**Proposition 34.18 - Lemme des coalitions.**

Soit $m$ et $n$ deux entiers tels que $1 \leqslant m \leqslant n$. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables (mutuellement) indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et $f$ et $g$ des applications définies sur des ensembles contenant respectivement $X_1(\Omega) \times \cdots \times X_m(\Omega)$ et $X_{m+1}(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$.
Les variables aléatoires $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ sont alors aussi indépendantes.

## Loi binomiale

**Définition 34.19 (*Loi binomiale*).** Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $p \in [0\,;\,1]$. On dit qu'une variable aléatoire réelle $X$ définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ suit une **loi binomiale** de paramètres $n$ et $p$ lorsque les deux points suivants sont vérifiés.

**1.** $[\![0, n]\!] \subset X(\Omega)$.

**2.** Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ où $q = 1 - p$.

On note alors $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

**Proposition 34.20 - Somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.**

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ (mutuellement) indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0\,;\,1]$.
La variable aléatoire $S = X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

Situation d'apparition de la loi binomiale. Une variable de loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ compte le nombre de succès dans $n$ expériences aléatoires indépendantes où la probabilité de succès de chaque expérience est $p$.

# Méthodes et exercices à connaître

## Utiliser la formule des probabilités composées

Cette formule intervient quand on cherche à calculer la probabilités d'une intersection (plusieurs événements tous réalisés) et qu'on n'est pas dans un contexte d'indépendance.

- Résultats du cours : Proposition 34.4
- Exercices ☕ : 34.7
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ :

## Utiliser la formule des probabilités totales

Cette formule est utile quand on est dans un contexte où plusieurs expériences aléatoires sont répétées et où le résultat d'une expérience dépend du résultats des expériences précédentes.

Si on a deux expériences aléatoires, la formule des probabilités totales donne directement le résultat.

Si on a $n$ expériences, la formule des probabilités totales permet souvent d'obtenir une relation de récurrence entre la probabilité d'un certain événement pour la $n$-ième expérience et celle pour la $(n+1)$-ième expérience. Une fois la relation de récurrence établie, on reconnaît souvent une suite usuelle dont on peut trouver le terme général si on se rappelle des formules sur les suites.

Dans la formule des probabilités totales, des probabilités conditionnelles apparaissent. Il en faut <u>jamais</u> utiliser la Définition 34.1 pour les calculer. Les probabilités conditionnelles sont toujours données directement (ou presque) dans l'énoncé !

- Résultats du cours : Lemme 34.5, Théorème 34.6
- Exercices ☕ : 34.8, 34.9 (1,2)
- Exercices ☕☕ : 34.9 (3,4), 34.10
- Exercices ☕☕☕ :

## Utiliser la formule de Bayes

Quand on a deux expériences consécutives et que l'une impacte l'autre, on connaît la probabilité d'un événement de la seconde expérience conditionnellement au résultat de la première expérience. La formule de Bayes est utile quand on veut l'autre probabilité conditionnelle (la probabilité d'un événement de la première expérience conditionnellement au résultat de la seconde). Elle est donc utile pour déterminer une probabilité quand on connaît le résultat final de l'expérience.

- Résultats du cours : Proposition 34.7
- Exercices ☕ : 34.1, 34.2, 34.3
- Exercices ☕☕ : 34.4
- Exercices ☕☕☕ : 34.5

## Montrer l'indépendance d'événements ou de variables aléatoires

Pour deux événements (resp. variables aléatoires), on utilise la Définition 34.9 (resp. la Définition 34.13). Pour trois événements (on en a rarement plus en pratique !) on utilise l'Exemple 34.11.

- Résultats du cours : Définition 34.9, Définition 34.10, Exemple 34.11, Proposition 34.12, Définition 34.13, Proposition 34.14, Définition 34.15, Proposition 34.16, Proposition 34.17, Proposition 34.18

- Exercices : 34.11, 34.14
- Exercices : 34.12, 34.13
- Exercices :

## Utiliser l'indépendance d'événements ou de variables aléatoires

Dans une situation d'indépendance, les calculs de probabilités d'intersection deviennent très simples !

- Résultats du cours : Définition 34.9, Définition 34.10, Exemple 34.11, Proposition 34.12, Définition 34.13, Proposition 34.14, Définition 34.15, Proposition 34.16, Proposition 34.17, Proposition 34.18
- Exercices : 34.7, 34.15, 34.16, 34.17
- Exercices : 34.18, 34.19 (1,2)
- Exercices : 34.19 (3), 34.23

## Reconnaître une situation où intervient la loi binomiale

Une variable aléatoire qui compte quelque chose quand on répète une expérience suit très souvent une loi binomiale. Il faut alors identifier ce qu'on compte, ce qui correspond au succès. Le paramètre « $p$ » est alors la probabilité de succès, « $n$ » est le nombre de répétitions de l'expérience. Quand on rédige, il faut bien préciser (et vérifier !) que les expériences répétées sont indépendantes l'une de l'autre.

- Résultats du cours : Définition 34.19, Proposition 34.20
- Exercices : 34.20, 34.21
- Exercices : 34.22
- Exercices :