

Kit de survie du cours

Univers, événements et variables aléatoires

Définition 33.1 (Issue, univers). 1. On appelle **issue** d'une expérience aléatoire un résultat possible de l'expérience.

2. On appelle **univers** d'une expérience aléatoire l'ensemble des issues. On le notera souvent Ω .

Définition 33.2 (Événement, réalisation d'un événement, événement élémentaire). 1. On appelle **événement** tout sous-ensemble de l'univers Ω .

2. On dit qu'un événement A est **réalisé** lorsqu'à la fin d'une expérience aléatoire, le résultat de l'expérience appartient à A .

3. On appelle **événement élémentaire** tout événement constitué d'une seule issue.

Définition 33.3 (Événement certain, événement impossible). 1. L'événement Ω est appelé l'événement **certain**.

2. L'événement $\emptyset$ est appelé l'événement **impossible**.

Définition 33.4 (Opérations sur les événements). Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

1. $\bar{A} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$ est l'événement **contraire** de A .

2. $A \cup B$ est l'événement « A **ou** B ».

3. $A \cap B$ est l'événement « A **et** B ».

4. $A \setminus B = \{\omega \in A \mid \omega \notin B\}$ est l'événement « A **mais pas** B ».

Définition 33.5 (Événements incompatibles). Soit A et B deux événements d'un univers Ω . On dit que A et B sont **incompatibles** (ou **disjoints**) lorsque $A \cap B = \emptyset$.

Définition 33.6 (Système complet d'événements). Soit $E_1, E_2, \dots, E_n$ des événements d'un univers Ω . On dit que $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ est un **système complet d'événements** (SCE) lorsque les deux conditions suivantes sont réalisées :

1. les événements E_k (où $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) sont deux à deux incompatibles ;

2. $\bigcup_{k=1}^n E_k = \Omega$.

Définition 33.7 (Variable aléatoire, variable aléatoire réelle). 1. On appelle **variable aléatoire** définie sur Ω à valeurs dans un ensemble E toute application définie sur Ω et à valeur dans E .

2. On appelle **variable aléatoire réelle** (**v.a.r.**) toute variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Définition 33.8 (Univers image d'une variable aléatoire). Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans un ensemble E . On appelle **univers image** de X l'ensemble de toutes les valeurs prises par X . On rappelle qu'on le note $X(\Omega)$.

Notation 33.9. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans l'ensemble E . Soit A une partie de E et $a \in E$.

- On note $(X \in A)$ ou $\{X \in A\}$ l'événement de $\mathcal{P}(\Omega)$ défini par :

$$(X \in A) = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}.$$

- On note $(X = a)$ ou $\{X = a\}$ l'événement de $\mathcal{P}(\Omega)$ défini par

$$(X = a) = X^{-1}(\{a\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}.$$

- Dans le cas où $E = \mathbf{R}$, pour tout $a \in \mathbf{R}$, on note $(X \leq a)$ ou $\{X \leq a\}$ l'événement

$$(X \leq a) = X^{-1}(]-\infty; a]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\}.$$

Proposition 33.10 - Système complet d'événements associé à une variable aléatoire.

Soit X une variable aléatoire sur Ω . On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec les x_i deux à deux distincts. Les événements $(X = x_1), \dots, (X = x_n)$ forment un système complet d'événements.

Probabilités

Définition 33.11 (Probabilité). On appelle **probabilité** sur Ω toute application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0; 1]$ qui vérifie :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
2. pour tous événements A et B **incompatibles**, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Définition 33.12 (Probabilité d'un événement). Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω . Pour tout événement A , le nombre $\mathbb{P}(A)$ est appelé la **probabilité de A** .

Définition 33.13 (Espace probabilisé). Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω . Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé fini**.

Définition 33.14 (Événements équiprobables). Deux événements qui ont la même probabilité sont dits **équiprobables**.

Définition 33.15 (Probabilité uniforme). Soit Ω un univers fini non vide. On appelle **probabilité uniforme** sur Ω l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0; 1] \\ A &\longmapsto \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \end{aligned}$$

C'est une probabilité.

Proposition 33.16 - Règles de calcul avec les probabilités.

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

1. $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
3. $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
4. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
5. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

On dit que la probabilité est une application **croissante** pour la relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Proposition 33.17 - Probabilité d'une union disjointe.

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Si les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k).$$

Corollaire 33.18 - Somme des probabilités dans un SCE.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Si $\{E_1, \dots, E_n\}$ est un système complet d'événements, alors $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(E_k) = 1$.
2. Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, alors $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = 1$, autrement dit la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.

Proposition 33.19 - Formule du crible de Poincaré pour deux événements.

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Définition 33.20 (Distribution de probabilités). On appelle **distribution de probabilités** sur un ensemble fini E toute famille d'éléments de $\mathbf{R}_+$ indexée par E et de somme 1.

Théorème 33.21 - Détermination d'une probabilité.

Soit Ω un univers fini et $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une distribution de probabilités sur Ω .
Il existe une et une seule probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω vérifiant :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega.$$

Conséquence importante : quand on donne une probabilité, on se contente toujours de donner les probabilités des événements élémentaires (ce qui suffit d'après le résultat énoncé ici).

Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 33.22 (Loi de probabilité d'une variable aléatoire). Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble E .

On appelle **loi de probabilité de X** ou plus simplement **loi de X** , la probabilité $\mathbb{P}_X$ définie sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$ par

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \quad \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A).$$

Proposition 33.23 - Distribution de probabilité d'une variable aléatoire.

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

1. La famille $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est une distribution de probabilités sur $X(\Omega)$ appelée la **distribution de probabilités de X** .
2. La donnée de la distribution de probabilités $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ détermine entièrement la loi de X . Plus précisément, on a

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \quad \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}_X(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x).$$

Conséquence importante : quand on demande la loi d'une variable aléatoire X , il faut trouver son univers image $X(\Omega)$ et on se contente de donner ensuite toutes les valeurs de $\mathbb{P}(X = x)$ pour chaque $x \in X(\Omega)$.

Premières lois usuelles

Définition 33.24 (Loi uniforme). Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels distincts, $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On dit que X suit une **loi uniforme** sur E lorsque les deux points suivants sont vérifiés.

1. $E \subset X(\Omega)$.
2. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}$.

On note alors $X \sim \mathcal{U}(E)$.

Définition 33.25 (Loi de Bernoulli). On dit qu'une variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0; 1]$, lorsque les deux points suivants sont vérifiés.

1. $\{0, 1\} \subset X(\Omega)$.
2. $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p$.

On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Situation d'apparition de la loi de Bernoulli. La loi $\mathcal{B}(p)$ apparaît dans les expériences avec seulement deux issues : succès (S) et échec ($\bar{S}$). Le nombre p est la probabilité d'obtenir un succès.

Couples de variables aléatoires

Notation 33.26. On utilise les mêmes notations que pour les variables aléatoires. Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires tel que X , on note pour tous $x \in X(\Omega)$, $y \in Y(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) = \mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y).$$

Proposition 33.27 - Systèmes complets d'événements associés à un couple de v.a..

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires.

La collection d'événements $\{(X = x) \text{ et } (Y = y) : (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\}$ est un système complet d'événements.

Théorème 33.28 - Loi conjointe.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

La **loi conjointe** du couple (X, Y) est la probabilité $\mathbb{P}_{(X, Y)}$, qui est définie sur $\mathcal{P}((X, Y)(\Omega))$ par :

$$\forall A \in (X, Y)(\Omega), \quad \mathbb{P}_{(X, Y)}(A) = \mathbb{P}(\{(X, Y) \in A\}).$$

Remarque : quand on demande la loi marginale, on se contente toujours de donner $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ pour tous $x \in X(\Omega)$, $y \in Y(\Omega)$.

Proposition 33.29 - Lois marginales.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Les lois de probabilité $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ de X et de Y sont appelées les **lois marginales** du couple (X, Y) et on les obtient de la manière suivante :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\})$$

et

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\}).$$

Méthodes et exercices à connaître

Calculer la probabilité d'un événement

Il faut revoir le cours de dénombrement, car on utilise souvent les techniques de ce chapitre en cas d'équiprobabilité. Les formules usuelles sur les probabilités sont à bien connaître.

- Résultats du cours : tout le vocabulaire de début de chapitre et les formules importantes sur les probabilités (Proposition 33.16, Proposition 33.17, Corollaire 33.18, Proposition 33.19)
- Exercices  : 33.1, 33.1 (1,2,3,4), 33.4, 33.5, 33.6, 33.7 (1,2,3), ??, ??, ??
- Exercices  : 33.3, ??, ??, ??, ??
- Exercices  : 33.2 (5,6), 33.7 (4,5)

Déterminer la loi d'une variable aléatoire

Si X est la variable aléatoire dont vous cherchez la loi, il faut toujours procéder suivant ces étapes :

1. On détermine l'univers image $X(\Omega)$ des valeurs possibles pour X .
2. On se demande si X suit une loi usuelle.
 - (a) Si les valeurs possibles pour X sont toutes équiprobables, alors X suit une loi uniforme.
 - (b) Si $X(\Omega) = \{0, 1\}$, alors X suit une loi de Bernoulli (son paramètre est $p = \mathbb{P}(X = 1)$).
3. Si X ne suit pas une loi usuelle, il faut calculer « à la main » chaque $\mathbb{P}(X = x)$, pour tout $x \in X(\Omega)$. Les techniques de dénombrement peuvent éventuellement être utiles (souvent c'est très simple!).

- Résultats du cours : Définition 33.7, Définition 33.8, Proposition 33.10, Définition 33.22, Proposition 33.23, Définition 33.24, Définition 33.25
- Exercices  : 33.15, 33.16
- Exercices  : 33.18 (1), 33.19 (1), 33.20 (1), 33.21 (1)
- Exercices  : 33.20 (2), 33.21 (2)

Déterminer la loi d'une variable aléatoire composée

Il faut essentiellement résoudre des équations. Par exemple, si on connaît la loi de X et qu'on veut la loi de $Y = e^X + 1$, alors il faut d'abord trouver $Y(\Omega)$ puis pour tout $y \in Y(\Omega)$, on commencera par :

$$\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(e^X + 1 = y) = \mathbb{P}(e^X = y - 1) = \mathbb{P}(X = \ln(y - 1))$$

et comme on connaît la loi de X , on peut donner la valeur de ce dernier réel.

- Résultats du cours :
- Exercices  : 33.15, 33.17, 33.18 (2), 33.19 (2)
- Exercices  :
- Exercices  :

Manipuler les couples de variables aléatoires

Dans ces exercices, on peut souvent obtenir la loi conjointe et il faut en déduire les lois marginales. Pour cela, on utilise la Proposition 33.29.

- Résultats du cours : Notation 33.26, Proposition 33.27, Théorème 33.28, Proposition 33.29
- Exercices  : 33.22, 33.23
- Exercices  :
- Exercices  : 33.24