Savez-vous faire ? 32 - Déterminants

Kit de survie du cours

$\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, n est un entier naturel non nul et E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 32.1 (*Application linéaire par rapport à chaque variable*). On considère une application

$$f : \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ (u_1, \dots, u_n) & \longmapsto & f(u_1, \dots, u_n) \end{array}$$

On dit que f est **linéaire par rapport à chaque variable** lorsque pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, et tous vecteurs u_1, u_2,..., u_{k-1}, u_{k+1},..., u_n de E, l'application

$$f_k : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ y & \longmapsto & f(u_1, \dots, u_{k-1}, y, u_{k+1}, \dots, u_n) \end{array}$$

est une forme linéaire.

Définition 32.2 (*Application linéaire alternée*). On considère une application $f : E^n \longrightarrow \mathbf{K}$ linéaire par rapport à chacune de ses variables.
On dit que f est **alternée** lorsqu'elle s'annule en chaque n-uplet d'éléments de E contenant deux vecteurs identiques, c'est-à-dire lorsqu'elle vérifie :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \quad \Big(\big(\exists i, j \in [\![1, n]\!], (i \neq j \text{ et } u_i = u_j)\big) \Longrightarrow f(u_1, \dots, u_n) = 0 \Big).$$

Proposition 32.3 - Antisymétrie d'une application alternée.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et n un entier naturel non nul. Si une application $f : E^n \to \mathbf{K}$ linéaire par rapport à chacune de ses variables est alternée, alors elle est **antisymétrique** : pour tous vecteurs $u_1, \dots, u_n$ de E et tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i < j$, on a

$$f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) = -f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n)$$

(c'est-à-dire que l'image par f d'un n-uplet de vecteurs est changée en son opposée si l'on permute deux des vecteurs).

Définition 32.4 (*Application déterminant*). Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Il existe une unique application $\det_{\mathcal{B}} : \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ (u_1, \dots, u_n) & \longmapsto & \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \end{array}$ qui vérifie les trois points suivants :

1. $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables.
2. $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée.
3. $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$ (c'est-à-dire $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$).

Cette application s'appelle le **déterminant** dans la base $\mathcal{B}$.

Définition 32.5 (*Déterminant d'une famille de vecteurs*). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $u_1, \dots, u_n \in E$. On appelle déterminant de $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$.

Proposition 32.6 - Principales propriétés du déterminant d'une famille de vecteurs.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $u_1, \ldots, u_n \in E$. En plus des trois points de la Définition 32.4, le déterminant vérifie les deux propriétés importantes suivantes :

1. Le déterminant est antisymétrique.
2. Si la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée, alors $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) = 0$.

Proposition 32.7 - Expression du déterminant en dimension 2.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B}$ une base de E. Pour deux vecteurs u et v de coordonnées (x, y) et (x', y') dans la base $\mathcal{B}$, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(u, v) = xy' - yx' = \underbrace{\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}}_{\text{notation}}.$$

Si $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormée directe du plan en géométrie plane, et si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans $\mathcal{B}$, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx' = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

est l'aire orientée du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (c'est-à-dire l'aire du parallélogramme si l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ a une mesure comprise entre 0 et π et l'opposé de cette aire sinon).

Théorème 32.8 - Caractérisation des bases avec le déterminant.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Une famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$.

Déterminant d'un endomorphisme

Le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ choisie. D'où la définition suivante.

Définition 32.9 (*Déterminant d'un endomorphisme*). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit f un endomorphisme de E. On appelle le **déterminant** de l'endomorphisme f et on note $\det(f)$ le scalaire

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

Proposition 32.10 - Principales propriétés.

1. Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ et tout endomorphisme u de E, on a $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
2. Pour tous endomorphismes f et g de E, on a $\det(g \circ f) = \det(g) \det(f) = \det(f \circ g)$.
3. Pour tout endomorphisme f de E, on a l'équivalence :

$$f \text{ est un automorphisme de } E \text{ si, et seulement si, } \det(f) \neq 0.$$

4. Pour tout automorphisme f de E, on a $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

Déterminant d'une matrice carrée

Définition 32.11 (*Déterminant d'une matrice carrée*). Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{K}$. On note $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de A qui sont des matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et on note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

On appelle **déterminant** de la matrice A et on note $\det(A)$ le scalaire :

$$\det(A) = \det_{\mathscr{C}}(C_1, \dots, C_n).$$

Proposition 32.12 - Propriétés caractéristiques du déterminant matriciel.

1. $\det(I_n) = 1$.
2. L'application $\det : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ A & \longmapsto & \det(A) \end{array}$ est **linéaire et alternée par rapport à chaque colonne de sa variable**. Cela signifie que
   - pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, pour toutes matrices colonnes $C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_i', C_{i+1}, \dots, C_n$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, et pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on a
   $$\begin{aligned} \det\left([C_1, \dots, C_{i-1}, \lambda C_i + C_i', C_{i+1}, \dots, C_n]\right) &= \lambda \det\left([C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_n]\right) \\ &\quad + \det\left([C_1, \dots, C_{i-1}, C_i', C_{i+1}, \dots, C_n]\right) \end{aligned}$$
   - si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ a deux colonnes identiques, alors $\det(A) = 0$.
3. Le déterminant matriciel est **antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable** : pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ tel que $i < j$, et pour toutes matrices colonnes $C_1, \dots, C_n$, on a
$$\det\left([C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n]\right) = -\det\left([C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n]\right).$$

Proposition 32.13 - Quelques règles de calcul.

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

1. Si l'une des colonnes de A est combinaison linéaire des autres, alors $\det(A) = 0$.
2. Si l'une des colonnes de A est nulle, alors $\det(A) = 0$.
3. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Proposition 32.14 - Principales propriétés du déterminant matriciel.

1. Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on a $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$.
2. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, la matrice A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$ autrement dit :
$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \iff \det(A) \neq 0.$$
3. Pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, on a $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
4. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on a $\det(A^\top) = \det(A)$.

Calcul pratique des déterminants

Proposition 32.15 - Opérations élémentaires sur les colonnes.

Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbf{K})$ et $\alpha \in \mathbf{K}^\star$.

1. Le déterminant de A reste inchangé si l'on ajoute à une colonne de A un multiple d'une autre colonne de A.
2. Le déterminant de A est changé en son opposé si l'on permute deux colonnes de A.
3. Le déterminant de A est multiplié par α si l'on multiplie une colonne de A par α.

Corollaire 32.16 - Opérations élémentaires sur lignes.

Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbf{K})$ et $\alpha \in \mathbf{K}^\star$.

1. Le déterminant de A reste inchangé si l'on ajoute à une ligne de A un multiple d'une autre ligne de A.
2. Le déterminant de A est changé en son opposé si l'on permute deux lignes de A.
3. Le déterminant de A est multiplié par α si l'on multiplie une ligne de A par α.

Proposition 32.17 - Déterminant d'une matrice diagonale, triangulaire.

1. Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux.
2. Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Il faut aussi savoir développer un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne (la formule n'est pas à apprendre par cœur, mais il faut savoir l'utiliser en pratique).

Résumé des liens entre les différents déterminants

On rappelle les liens existants sur un exemple. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 dont on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base. Soit $u_1, u_2 \in E$ dont on note (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées respectives. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note enfin $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$. On rappelle que $\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$ est l'application linéaire (ici un endomorphisme) canoniquement associée à A.

	Famille	Endomorphisme	Matrice
Famille			$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = \det\left(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2)\right)$
Endomorphisme	$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}\left(f(e_1), f(e_2)\right)$		$\det(f) = \det\left(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)\right)$
Matrice	$\det(A) = \det_{\mathcal{C}}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$	$\det(A) = \det(\varphi_A)$	

Méthodes et exercices à connaître

Calculer le déterminant d'une matrice

Connaître la construction théorique du déterminant n'est pas indispensable ici. C'est un chapitre assez calculatoire, connaître les règles pour trouver un déterminant suffit ici. Voici les principales :

1. Si on a une matrice triangulaire ou diagonale, le déterminant est égal au produit des coefficients diagonaux.
2. Si on a une matrice 2×2, une formule donne le déterminant (cf. Proposition 32.7)
3. Si on a une matrice de taille plus grande, on peut faire des opérations de Gauss, ce qui ne change pas la valeur du déterminant (sur les lignes ou les colonnes suivants ce qui arrange).
4. On peut aussi développer un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne (cette technique est puissante si on a déjà fait une opération de pivot avant). Si on demande une relation de récurrence avec des déterminants de taille n, c'est ce dernier point qui est utile.

- Résultats du cours : Proposition 32.7, Proposition 32.12, Proposition 32.13, Proposition 32.14, Proposition 32.15, Corollaire 32.16, Proposition 32.17
- Exercices ☕ : 32.1, 32.3, 32.4 (1,2), 32.6 (1,2,3,5,6)
- Exercices ☕☕ : 32.2, 32.6 (4), 32.7, 32.8
- Exercices ☕☕☕ : 32.4 (3), 32.9

Calculer le déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme

On se ramène presque systématiquement au déterminant d'une matrice. On rappelle les propriétés utiles :

1. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ est une base de E, alors $\det(f) = \det(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f))$.
2. Si $u_1, \ldots, u_n \in E$ et $\mathcal{B}$ est une base de E, alors $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \det(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n))$.

- Résultats du cours :
- Exercices ☕ : 32.10, 32.11, 32.12 (1), 32.13, 32.14
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ :

Utiliser les propriétés du déterminant

Le déterminant est très utile pour les questions suivantes.

1. Est-ce qu'une famille de vecteurs est une base ? (Théorème 32.8)
2. Est-ce qu'un endomorphisme est un automorphisme ? (Proposition 32.10)
3. Est-ce qu'une matrice est inversible ? (Proposition 32.14)

À chaque fois la condition est la même, on peut répondre par l'affirmative aux questions suivantes si le déterminant correspondant est non nul (et par la négative si le déterminant est nul).

Ici le problème est toujours de vérifier si un déterminant est nul. Si le déterminant dépend de paramètres, il faut donc essayer d'en obtenir une forme factorisée !

- Résultats du cours : Théorème 32.8, Proposition 32.10, Proposition 32.14
- Exercices ☕ : 32.3, 32.5, 32.10, 32.11, 32.12 (1), 32.13, 32.14
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ :