

Kit de survie du cours

Soit E, F deux espaces vectoriels de dimensions p et n respectivement. On note $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de F . Soit u une application linéaire de E dans F .

Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 31.1 (Matrice colonne des coordonnées). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit x un vecteur de E de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$.

La **matrice colonne des coordonnées** de x dans $\mathcal{B}$ est la matrice $M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Définition 31.2 (Matrice d'une famille de vecteurs). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille finie de vecteurs de E .

La **matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$** , notée $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$, est la matrice de format $n \times p$ où pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la j -ième colonne est celle des coordonnées de v_j dans la base $\mathcal{B}$.

Définition 31.3 (Rang d'une matrice). Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On note $C_1, C_2, \dots, C_p$ les colonnes de A (ce sont des vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, appelés les vecteurs colonnes de A).

On appelle le **rang de la matrice A** et on note $\text{rg}(A)$ le rang de la famille de vecteurs $(C_1, \dots, C_p)$, autrement dit

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, C_2, \dots, C_p).$$

Matrice d'une application linéaire

Définition 31.4 (Matrice d'une application linéaire). On appelle **matrice de l'application linéaire u** dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice, notée $M_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u)$, définie par

$$M_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u) = M_{\mathcal{B}_F}(u(e_1), \dots, u(e_p)) = \begin{pmatrix} u(e_1) & u(e_2) & \dots & u(e_j) & \dots & u(e_p) \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}.$$

Dans le cas où u est un endomorphisme de E (c'est-à-dire où $E = F$), on peut choisir (mais ce n'est pas obligatoire) la même base au départ et à l'arrivée et, dans ce cas, on appelle matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ la matrice notée $M_{\mathcal{B}}(u)$ et définie par

$$M_{\mathcal{B}}(u) = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(u).$$

Exemple 31.5 (♥). Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E (de dimension n). Considérons l'endomorphisme

$$\begin{aligned} \text{Id}_E : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

On a alors :

$$M_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = M_{\mathcal{B}'}(\text{Id}_E) = I_n.$$

Proposition 31.6 - Matrice de l'image d'un vecteur.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $u \in E$, $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F . On a

$$M_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) \times M_{\mathcal{B}_E}(x).$$

Proposition 31.7 - Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.

$\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

Proposition 31.8 - Matrice d'une composée.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$, G un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de r , $\mathcal{B}_G$ une base de G . Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

$$M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(v) \times M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u).$$

Corollaire 31.9 - Composées itérées d'un endomorphisme.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_{\mathcal{B}_E}(u^n) = (M_{\mathcal{B}_E}(u))^n$ (on rappelle que $u^n = u \circ \dots \circ u$).

Proposition 31.10 - Caractérisation des isomorphismes et matrice de la réciproque.

Une application linéaire $u : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme si, et seulement si, la matrice $M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ est inversible. Le cas échéant,

$$M_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u^{-1}) = (M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u))^{-1}.$$

31.1 Noyau, image d'une matrice

Définition 31.11 (Application linéaire canoniquement associée à une matrice). Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On appelle application linéaire canoniquement associée à A l'application linéaire

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

Définition 31.12 (Noyau, image d'une matrice). Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

- On appelle **noyau** de la matrice A et l'on note $\text{Ker}(A)$ le noyau de l'application linéaire φ_A canoniquement associée à A . Autrement dit,

$$\text{Ker}(A) = \text{Ker}(\varphi_A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \mid AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\}.$$

- On appelle **image** de A et l'on note $\text{Im}(A)$ l'image de l'application linéaire canoniquement associée à A . Autrement dit,

$$\text{Im}(A) = \text{Im}(\varphi_A) = \{AX : X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})\}.$$

Proposition 31.13 - Caractérisation des matrices inversibles.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice carrée. La matrice A est inversible si, et seulement si, l'une des trois conditions équivalentes suivantes est satisfaite.

- (i) $\text{Ker}(A) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\}.$
- (ii) $\text{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}).$
- (iii) $\text{rg}(A) = n.$

Changement de base

Définition 31.14 (Matrice de passage entre deux bases). Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E . On appelle **matrice de passage** (ou **matrice de changement de base**) de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice notée $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ dont la j -ième colonne (pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$) est formée par les coordonnées du vecteur e'_j dans la base $\mathcal{B}$. C'est donc la matrice carrée de type $n \times n$:

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E).$$

Proposition 31.15 - Inverse d'une matrice de passage.

Toute matrice de changement de base est inversible. De plus, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E , l'inverse de la matrice $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ est la matrice $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$, autrement dit

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \in \text{GL}_n(\mathbf{K}) \quad \text{et} \quad (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}.$$

Réciproquement, toute matrice inversible $M \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ est une matrice de passage.

Proposition 31.16 - Formule de changement de base pour les vecteurs.

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $x \in E$. Alors

$$M_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \times M_{\mathcal{B}'}(x).$$

Proposition 31.17 - Formule de changement de bases pour les matrices.

Soit $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$ deux bases de E , $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F$ deux bases de F . Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Notons $A = M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_F}(u)$ et $A' = M_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(u)$. Alors

$$A' = Q^{-1}AP \quad \text{où} \quad P = P_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E} \quad \text{et} \quad Q = P_{\mathcal{B}_F \rightarrow \mathcal{B}'_F}$$

ou encore

$$M_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(u) = (P_{\mathcal{B}_F \rightarrow \mathcal{B}'_F})^{-1} \times M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) \times P_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E}.$$

Corollaire 31.18 - Cas particulier des endomorphismes.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Notons $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, $A' = M_{\mathcal{B}'}(u)$ et $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$. Alors

$$A' = P^{-1}AP$$

ou encore

$$M_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}(u) P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}.$$

Définition 31.19 (Matrices semblables). Deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont dites **semblables** s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ tel que $A' = P^{-1}AP$.

Rangs : tout s'imbrique

Rappelons rapidement les différentes notions de rang rencontrées jusqu'ici.

- Rang d'une famille de vecteurs.** Le rang d'une famille finie $(v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs est la dimension de $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$. On note $\text{rg}(v_1, \dots, v_n)$.
- Rang d'une application linéaire.** Une application linéaire u d'un espace vectoriel E de dimension finie vers un espace vectoriel F est de rang fini.
 - Par définition, son rang $\text{rg}(u)$ est la dimension de $\text{Im}(u)$.
 - Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors $\text{rg}(u) = \text{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n))$.
- Rang d'une matrice.** Le rang d'une matrice A est le rang de la famille des vecteurs colonnes de A .

Théorème 31.20 - Lien entre le rang d'une matrice et d'une application linéaire.

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Le rang d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est égal au rang de la matrice $M_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u)$.

En particulier,

- le rang d'une application linéaire est égal à celui de toute matrice la représentant (matrices différentes suivant les bases choisies) ;
- le rang d'une matrice est celui de n'importe quelle application linéaire représentée par cette matrice ;
- deux applications linéaires pouvant être représentées par la même matrice ont le même rang.

Corollaire 31.21 - Rang de matrices qui représentent la même application linéaire.

Deux matrices représentant la même application linéaire dans des bases différentes ont le même rang. En particulier, si A et P sont deux matrices carrées de même format, P étant inversible, alors en posant $A' = P^{-1}AP$, on a $\text{rg}(A') = \text{rg}(A)$. Cette dernière propriété signifie que **deux matrices semblables ont le même rang**.

Définition 31.22 (Rang d'un système linéaire). On appelle **rang d'un système** le rang de sa matrice associée.

Proposition 31.23 - Lien entre le rang et le nombre de pivots.

Le rang d'un système est le nombre de pivots de n'importe quelle réduite de Gauss de ce système.

Corollaire 31.24 - Dimension de l'espace vectoriel des solutions.

Soit (S) un système linéaire **homogène** à n lignes et p inconnues. On note $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sa matrice associée.

Alors, la dimension de l'ensemble des solutions de (S) est $p - \text{rg}(A)$.

Méthodes et exercices à connaître

Utiliser les matrices pour trouver le noyau, l'image d'une application linéaire

Déjà, il faut absolument savoir déterminer la matrice associée à une application linéaire dans des bases données. Ce qu'il faut retenir c'est que les colonnes de la matrice sont les coordonnées des images des vecteurs de la base de départ, exprimées dans la base d'arrivée (voir Définition 31.4).

- Résultats du cours : Définition 31.4, Définition 31.11, Définition 31.12, Théorème 31.20, Proposition 31.23
- Exercices  : 31.2, 31.9, 31.10, 31.11 (1), 31.12, 31.18, 31.19
- Exercices  :
- Exercices  :

Utiliser les matrices pour calculer l'image d'un vecteur par une application linéaire

- Résultats du cours : Proposition 31.6
- Exercices  : 31.4
- Exercices  :
- Exercices  :

Utiliser les matrices pour déterminer une composée, une réciproque

On rappelle qu'on peut détecter les symétries ou les projections en utilisant la composition. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors A est la matrice d'une projection (resp. d'une symétrie) si et seulement si $A^2 = A$ (resp. $A^2 = I_n$).

- Résultats du cours : Proposition 31.8, Proposition 31.9, Proposition 31.10
- Exercices  : 31.3, 31.5, 31.9, 31.18, 31.19
- Exercices  : 31.8, 31.21
- Exercices  :

Faire un changement de bases

Ce sont essentiellement des formules à appliquer, rien de bien compliqué (si on connaît son cours ☺)

- Résultats du cours : Définition 31.14, Proposition 31.15, Proposition 31.16, Proposition 31.17, Corollaire 31.18
- Exercices  : 31.13, 31.14, 31.15, 31.17, 31.20
- Exercices  : 31.16
- Exercices  :

Déterminer le noyau, l'image et le rang d'une matrice

Tout se fait avec le pivot de Gauss! Si vous avez du mal à travailler directement sur la matrice, vous pouvez toujours vous ramener à l'application linéaire canoniquement associée à la matrice donnée.

- Résultats du cours : Définition 31.3, Définition 31.11, Définition 31.12, Théorème 31.20, Proposition 31.23
- Exercices  : 31.23, 31.24 (1)
- Exercices  : 31.24 (2)
- Exercices  :

Utiliser les matrices pour décider si une famille de vecteurs est une base

Si on dispose de la matrice de la famille de vecteurs, il faut déjà vérifier que la matrice est carrée (car en dimension finie, il faut autant de vecteurs que la dimension, ce qui revient pour une matrice à vérifier qu'elle compte autant de colonnes que de lignes). Ensuite, il faut trouver le rang de la matrice (si le rang est égal au nombre de lignes, la famille est une base) avec un pivot de Gauss (on rappelle que le rang est le nombre de pivots choisis une fois la réduction de Gauss achevée).

- Résultats du cours : Définition 31.1, Définition 31.2
- Exercices  : 31.1, 31.13, 31.14, 31.15, 31.17
- Exercices  :
- Exercices   :

Déterminer une base pour que la matrice d'une application linéaire ait une forme donnée

Il faut utiliser la Définition 31.4 essentiellement ! Si la matrice d'une application u dans une certaine base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors pour trouver e_1 et e_2 il faut chercher de tels vecteurs (ils ne sont pas uniques !) tels que $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = 2e_1 - e_2$ par exemple.

- Résultats du cours : Définition 31.4
- Exercices  : 31.5
- Exercices  : 31.10 (2)
- Exercices   : 31.7, 31.11 (2), 31.22