Savez-vous faire ? 30 - Ensembles finis et dénombrement

Kit de survie du cours

Ensembles finis

Intuitivement, un **ensemble fini de cardinal** n est un ensemble $\{x_1, ..., x_n\}$ comportant n éléments.

Théorème 30.1 - Cardinal d'une partie, cas d'égalité.

Soit E un ensemble fini et F une partie de E.

1. F est un ensemble fini et $\text{Card}(F) \leqslant \text{Card}(E)$.

2. $F = E \iff \text{Card}(F) = \text{Card}(E)$.

Proposition 30.2 - Effet d'une application sur le cardinal.

Soit E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F.

1. $f(E)$ est un ensemble fini, $\text{Card}(f(E)) \leqslant \text{Card}(F)$ et $\text{Card}(f(E)) \leqslant \text{Card}(E)$.

2. L'application f est injective, si et seulement si, $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$ et dans ce cas $\text{Card}(F) \geqslant \text{Card}(E)$.

3. L'application f est surjective si, et seulement si, $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F)$ et dans ce cas $\text{Card}(F) \leqslant \text{Card}(E)$.

4. L'application f est bijective si, et seulement si, $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.

Corollaire 30.3 - Caractérisation des applications bijectives entre ensembles finis.

Soit E et F deux ensembles finis <u>de même cardinal</u>, $f : E \longrightarrow F$. Alors

$$f \text{ est injective } \iff f \text{ est surjective } \iff f \text{ est bijective}$$

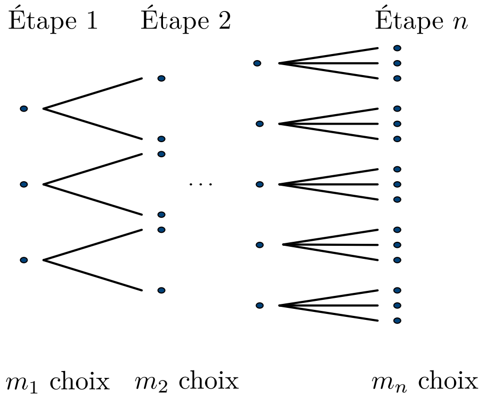
Théorème 30.4 - Nombre de parties d'un ensemble fini.

Si E est un ensemble fini de cardinal n, alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini et $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Méthodes de dénombrement

Méthode 30.5. *Principe multiplicatif*

Si on cherche à dénombrer des objets construits en plusieurs étapes, on peut représenter ces objets comme les différentes branches d'un arbre simple :



S'il y a n étapes, et qu'à l'étape k, il y a m_k possibilités (m_k branches si on représente la situation avec un arbre), alors le nombre total d'objets est $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$.

Proposition 30.6 - Cardinal d'une union disjointe de deux ensembles finis.

Soit A et B deux ensembles finis disjoints. L'ensemble $A \cup B$ est fini et

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

Corollaire 30.7 - Cardinal d'un union d'ensembles finis deux à deux disjoints.

Soit $p \in \mathbf{N}^\star$. Soit $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une famille de p ensembles finis deux à deux disjoints. L'ensemble $\bigcup\limits_{k=1}^{p} A_k$ est un ensemble fini et

$$\mathrm{Card}(\bigcup_{k=1}^{p} A_k) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Card}(A_k).$$

Corollaire 30.8 - Formule du crible de Poincaré.

Soit A et B deux ensembles finis. L'ensemble $A \cup B$ est fini et

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Proposition 30.9 - Cardinal du complémentaire.

Soit A une partie finie d'un ensemble fini E. Le complémentaire de A dans E est une partie finie et

$$\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A).$$

Méthode 30.10. *Dénombrer un problème décrit avec « au plus » ou « au moins »*

Quand on a un ensemble décrit avec « au plus » (ou « au moins »), on le décompose en ensembles disjoints. Par exemple, si on veut compter l'ensemble A des étudiants d'un lycée pratiquant au plus deux sports, on procédera par disjonction de cas en dénombrant :

- A_0 : l'ensemble des étudiants qui pratiquent 0 sport ;
- A_1 : l'ensemble des étudiants qui pratiquent exactement 1 sport ;
- A_2 : l'ensemble des étudiants qui pratiquent exactement 2 sports.

Ainsi, $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2$ et puisque l'union est disjointe (si on est dans un ensemble alors on n'est pas dans un autre), $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(A_0) + \mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A_2)$.
Parfois, il est plus simple de passer par le complémentaire ! En effet, si on veut dénombrer l'ensemble B des étudiants qui pratiquent au moins trois sports il est impossible de le faire directement. Par contre, le complémentaire de B est A, donc on a :

$$\mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A),$$

où désigne désigne l'ensemble des étudiants du lycée.

Méthode 30.11. *Repérer une situation où les objets sont ordonnés, les répétitions sont autorisées*

- On peut repérer une situation où les objets sont ordonnés avec l'expression « tirages successifs ». Quand les objets sont « distincts », on peut aussi les ordonner (si on est capable de distinguer deux objets alors on peut convenir, arbitrairement, que l'un des deux est le premier et l'autre le second).
- L'expression « tirage avec remise » correspond à une situation où les répétitions sont autorisées.

Méthode 30.12. *Repérer une situation où les objets sont ordonnés, les répétitions sont interdites*

L'expression « tirage sans remise » correspond à situation où les répétitions sont interdites.

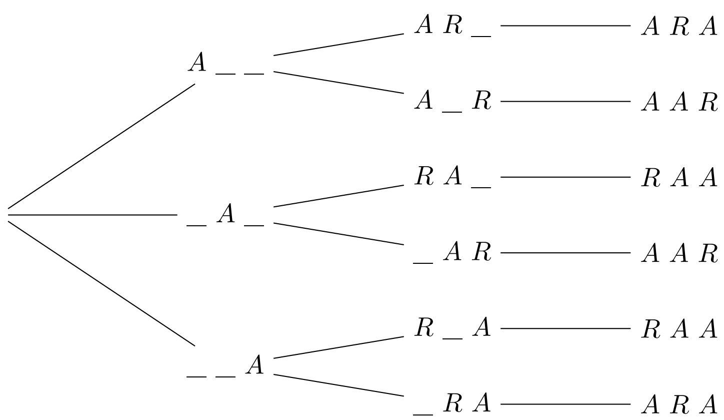
Méthode 30.13. *Modélisation des tirages simultanés*

Les combinaisons sont utilisées pour modéliser des tirages **simultanés** (l'ordre ne compte pas et les répétitions sont interdites).

Méthode 30.14. *Dénombrer des anagrammes*

On appelle **anagramme** d'un mot tout autre mot composé des mêmes lettres mais dans un ordre quelconque. Par exemple, une anagramme de « GALILEE » est « EGAILLE ». Une autre anagramme est aussi « AEEIGLL ».

Pour dénombrer des anagrammes, on peut dénombrer les positions possibles des différentes lettres. Si les lettres sont indiscernables, il faut bien penser à choisir simultanément la position des lettres identiques. Par exemple, cherchons les anagrammes de « ARA ». Si on cherche séparément les positions de chaque lettre, on commet une erreur puisque certains mots sont comptés deux fois.

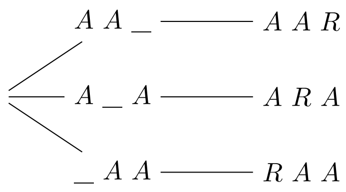


En effet, en procédant ainsi, on considère les lettres discernables $A_1R_2A_3$. Ainsi les mots $A_1R_2A_3$ et $A_3R_2A_1$ sont distincts, alors qu'en réalité on lit le même mot !

Pour traiter correctement cet exercice, il faut placer simultanément les lettres identiques !

- Positions des deux A : $\binom{3}{2} = 3$ possibilités.
- Position du R : 1 possibilité (il ne reste plus qu'une place si deux lettres sont déjà placées).

En tout, $\binom{3}{2} \times 1 = 3$ anagrammes de « ARA ».



Approche plus théorique

Définition 30.15 (*Liste*). Soit E un ensemble et $p \geqslant 1$ un entier. On appelle p-**liste** d'éléments de E ou p-**uplet** d'éléments de E un élément de E^p.
On rappelle qu'un élément de E^p (donc une p-liste) s'écrit avec des parenthèses : $(x_1, x_2, \dots)$.

Proposition 30.16 - Nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments.

Soit E un ensemble à n éléments et $p \geqslant 1$ un entier. Le nombre de p-listes ou p-uplets d'éléments de E est égal à n^p.

Définition 30.17 (*Arrangement*). Soit E un ensemble et p un entier naturel non nul. On appelle p-**arrangement** de E une p-liste d'éléments distincts de E.

Proposition 30.18 - Nombre de p-arrangements d'un ensemble à n éléments.

Soit E un ensemble fini à n éléments et p un entier naturel inférieur ou égal à n et strictement positif. Le nombre de p-arrangements de E vaut

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Définition 30.19 (*Combinaison*). Soit E un ensemble de cardinal n et $p \leqslant n$ un entier naturel.
On appelle p-**combinaison** de E toute partie de E de cardinal p.

Proposition 30.20 - Nombre de p-combinaisons d'un ensemble à n éléments.

Soit E un ensemble de cardinal n et $p \leqslant n$ un entier naturel.
Le nombre de p-combinaisons de E est : $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. On appelle ce nombre **coefficient binomial** et on note

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

(se lit « p parmi n »). On convient que si $p \notin [\![0, n]\!]$, alors $\binom{n}{p} = 0$.

Dénombrements d'applications entre ensembles finis

Proposition 30.21 - Nombre d'applications.

Si E et F sont deux ensembles finis non vides, alors le nombre d'applications de E dans F est un ensemble fini et $\text{Card}(F^E) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}$.

Proposition 30.22 - Nombre d'applications injectives.

Soit E et F deux ensembles finis, dont on note n et p les cardinaux respectifs. On suppose $p \leqslant n$. L'ensemble des applications injectives de E dans F est de cardinal $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Définition 30.23 (*Permutation*). Soit E un ensemble fini non vide. On appelle **permutation** de E toute bijection de E dans E.

Corollaire 30.24 - Nombre de permutations.

Si E est un ensemble fini non vide de cardinal $n > 0$, alors le nombre de permutations de E est égal à $n!$.

Bilan pratique pour les exercices de dénombrement

En pratique, un problème de dénombrement peut être compliqué, mais il y a tout de même une trinité merveilleuse de modèles de base auxquels on peut presque toujours se ramener.

Propriétés de l'objet à dénombrer		Modélisé par	Exemple fondamental	Écriture
Ordre	Éléments tous distincts			
Non	Oui	Parties d'un ensemble E : on utilise des combinaisons	Tirages simultanés	{...;.... ;... }
Oui	Non	p-uplets d'éléments d'un même ensemble E : on utilise des listes	Tirages successifs avec remise	(...;... ;...)
Oui	Oui	p-uplets d'éléments d'un même ensemble E, sans répétition : on utilise des arrangements	Tirages successifs sans remise	(...;... ;...)
Non	Non	On modifie la modélisation pour se ramener à l'un des trois cas précédents		

Méthodes et exercices à connaître

Compter des objets

L'objectif ultra-prioritaire de ce chapitre ! Les sections sont aussi des problèmes de dénombrement mais dans des situations plus spécifiques. Voici quelques situations à reconnaître pour vous aider.

1. **Peut-on utiliser le principe multiplicatif ?** Si les objets sont distinguables, on peut les ordonner et donc raisonner étape par étape pour compter les objets (ce qui revient à appliquer le principe multiplicatif, Méthode 30.5).
   Si on veut raisonner de manière plus théorique et utiliser des listes ou des arrangements, on peut se demander si les répétitions sont autorisées.
2. **Et si les objets ne sont pas distinguables ?** Il faut espérer que les répétitions soient interdites, auquel cas on fait des tirages simultanés et on utilise des combinaisons. Sinon, l'exercice est plus compliqué (une bonne piste pour s'en sortir est d'essayer de se ramener à un problème d'anagrammes).
3. **Quand faire une disjonction de cas ?** Il faut disjoindre si les situations qu'on cherche à dénombrer sont plus compliquées. Il faut chercher à séparer le problème difficile en plusieurs problèmes simples (puis appliquer soit **1.**, soit **2.**).
   Un grand classique, c'est par exemple quand on fait douze lancers de dés et qu'on demande de dénombrer les tirages où l'on fait « au moins dix fois 6 ». Il faut disjoindre en « exactement dix 6 », « exactement onze 6 » et « exactement douze 6 ». De manière plus générale, avec les expressions « au moins » ou « au plus », il faut disjoindre en des situations plus simples décrites avec l'expression « exactement ».
4. **Quand utiliser le complémentaire ?** L'utilisation du complémentaire peut aussi être utile s'il y a trop de cas à disjoindre. Si on reprend l'exemple de douze lancers de dés, dénombrer les tirages où l'on fait « au moins une fois 6 » peut se faire avec la disjonction « au moins une fois 6 » ou « au moins deux fois 6 », « au moins deux fois 6 », etc. ce qui revient à dénombrer beaucoup de situations ! C'est bien plus simple de dénombrer l'événement contraire « on fait strictement moins de une fois 6 », ce qui revient simplement à compter les tirages sans 6 !

- Résultats du cours : toutes les méthodes de la section *Méthodes de dénombrement* ainsi que la Définition 30.19 et la Proposition 30.20. Les autres résultats sur les listes et les arrangements sont moins utiles (on peut très bien tout faire sans !).
- Exercices : 30.1, 30.2, 30.3, 30.4, 30.5, 30.8, 30.9 (1), 30.11, 30.12 (1,2,3), 30.13
- Exercices : 30.6, 30.7, 30.1 (3,4), 30.12, 30.15, 30.18 (1,2,3)
- Exercices : 30.1 (2), 30.10, 30.14, 30.16, 30.17, 30.18 (4)

Démonstration de formules par des méthodes combinatoires

C'est joli mais souvent un peu plus difficile ! L'idée est toujours la même, on compte un même problème de deux manières différentes et cela donne une formule. Petites astuces : si une somme apparaît dans la formule qu'on vous demande de démontrer, c'est que le principe de disjonction n'est pas loin ! Si c'est un produit (peut être caché dans une factorielle), le principe multiplicatif ni est souvent pas pour rien. Enfin, avec des coefficients binomiaux, les tirages simultanés sont certainement de la partie !

- Résultats du cours : les démonstrations du cours surtout sont à revoir et à comprendre, elles peuvent vous inspirer pour d'autres exercices
- Exercices : 30.23
- Exercices : 30.24, 30.25, 30.26
- Exercices :

Utiliser les applications entre ensembles finis

- Résultats du cours : les démonstrations du cours surtout sont à revoir et à comprendre, elles peuvent vous inspirer pour d'autres exercices.
- Exercices : 30.19 (1,2)

- Exercices : 30.20
- Exercices : 30.19 (3,4), 30.21, 30.22