Savez-vous faire ? 29 - Applications linéaires

Kit de survie du cours

Dans tout ce chapitre, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, n et p désignent des entiers naturels non nuls. E, F et G désigneront des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

Définitions et premières propriétés

Définition 29.1 (*Application linéaire, forme linéaire*). Soit $u : E \longrightarrow F$ une application. On dit que u est une **application linéaire** si

$$\forall x, y \in E,\ \forall \alpha \in \mathbf{K}, \quad u(\alpha x + y) = \alpha u(x) + u(y).$$

Si $F = \mathbf{K}$ et si u est linéaire, alors on dit alors que u est une **forme linéaire**.
L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposition 29.2 - Opérations sur les applications linéaires.

1. Une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire.
2. Une composée d'applications linéaires est linéaire.

Définition 29.3 (*Applications linéaires usuelles*).
- Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans lui-même, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{L}(E)$.
- Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. L'application $\lambda \mathrm{Id}_E$ est un endomorphisme de E appelé l'**homothétie de E de rapport λ**.
- On appelle **isomorphisme** une application linéaire bijective entre deux espaces vectoriels.
- On appelle **automorphisme** un endomorphisme bijectif. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$.

Notation 29.4. On note souvent la composition des endomorphismes de E comme un produit. C'est-à-dire que pour u et v dans $\mathcal{L}(E)$,

$$uv = u \circ v.$$

On notera en particulier la composée n-ième d'un endomorphisme u avec lui-même comme :

$$u^n = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}.$$

Plus précisément, on convient que $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et on note

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u^{n+1} = u \times u^n$$

(ou pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u^{n+1} = u^n \times u$).

Proposition 29.5 - Opérations sur les isomorphismes.

Soit E, F, G des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$, $v : F \longrightarrow G$ des isomorphismes.

1. $u^{-1} : F \longrightarrow E$, l'application réciproque de u, est aussi un isomorphisme. On a de plus $\left(u^{-1}\right)^{-1} = u$.
2. $v \circ u : E \longrightarrow G$ est un isomorphisme. On a de plus $(vu)^{-1} = u^{-1}v^{-1}$.

Remarque 29.6. On rappelle que dans le point **2.** de la proposition précédente, l'égalité signifie $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$.

Noyau, image

Proposition 29.7 - Images directes et réciproques de sous-espaces vectoriels.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Si G est un sous-espace vectoriel de E, alors $u(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si H est un sous-espace vectoriel de F, alors $u^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 29.8 (*Noyau, image d'une application linéaire*). Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. On appelle **noyau** de u et on note $\mathrm{Ker}(u)$ l'ensemble des antécédents de 0_F par u.
$$\mathrm{Ker}(u) = u^{-1}(\{0_F\}).$$
2. On appelle **image** de u et on note $\mathrm{Im}(u)$ l'ensemble des images des éléments de E par u.
$$\mathrm{Im}(u) = u(E).$$

Proposition 29.9 - Le noyau et l'image sont des sous-espaces vectoriels.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors,

1. $\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E,
2. $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Théorème 29.10 - Lien entre surjectivité et image.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. u est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(u) = F$.

Théorème 29.11 - Lien entre injectivité et noyau.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. u est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.

Cas de la dimension finie

Proposition 29.12 - Famille génératrice d'une image.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie et on note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$.

Proposition 29.13 - Image d'une famille libre, génératrice, d'une base.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille finie de vecteurs de E. On pose $\mathcal{G} = (u(e_1), \dots, u(e_n))$.

1. Si u est injective et si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathcal{G}$ est libre.
2. Si u est surjective et si $\mathcal{F}$ est génératrice de E, alors $\mathcal{G}$ est génératrice de F.
3. Si u est bijective et si $\mathcal{F}$ est une base de E, alors $\mathcal{G}$ est une base de F.

Proposition 29.14 - Deux applications qui coïncident sur une base sont égales.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$. Si

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad u(e_i) = v(e_i),$$

alors les applications u et v sont égales

Rang d'une application linéaire

Définition 29.15 (*Application linéaire de rang fini*). Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On dit que u est de **rang fini** si $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie. Le cas échéant, on appelle **rang** de u l'entier $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$.

Théorème 29.16 - Inégalités sur le rang et cas d'égalité.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. Si F est de dimension finie, u est de rang fini et $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(F)$, avec égalité si et seulement si u est surjective.
2. Si E est de dimension finie, u est de rang fini et $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(E)$, avec égalité si et seulement si u est injective.
3. Si E et F sont de dimension finie, u est de rang fini, $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(E)$ et $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(F)$. De plus, u est un isomorphisme si et seulement si $\dim(E) = \mathrm{rg}(u) = \dim(F)$.

Théorème 29.17 - Caractérisation des isomorphismes en dimension finie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

$$u \text{ est bijective} \iff \left\{ \begin{array}{c} u \text{ est injective} \\ \dim(E) = \dim(F) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} u \text{ est surjective} \\ \dim(E) = \dim(F) \end{array} \right. .$$

Théorème 29.18 - Théorème du rang, forme usuelle.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose E de dimension finie. Alors

$$\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(E).$$

Autrement dit,

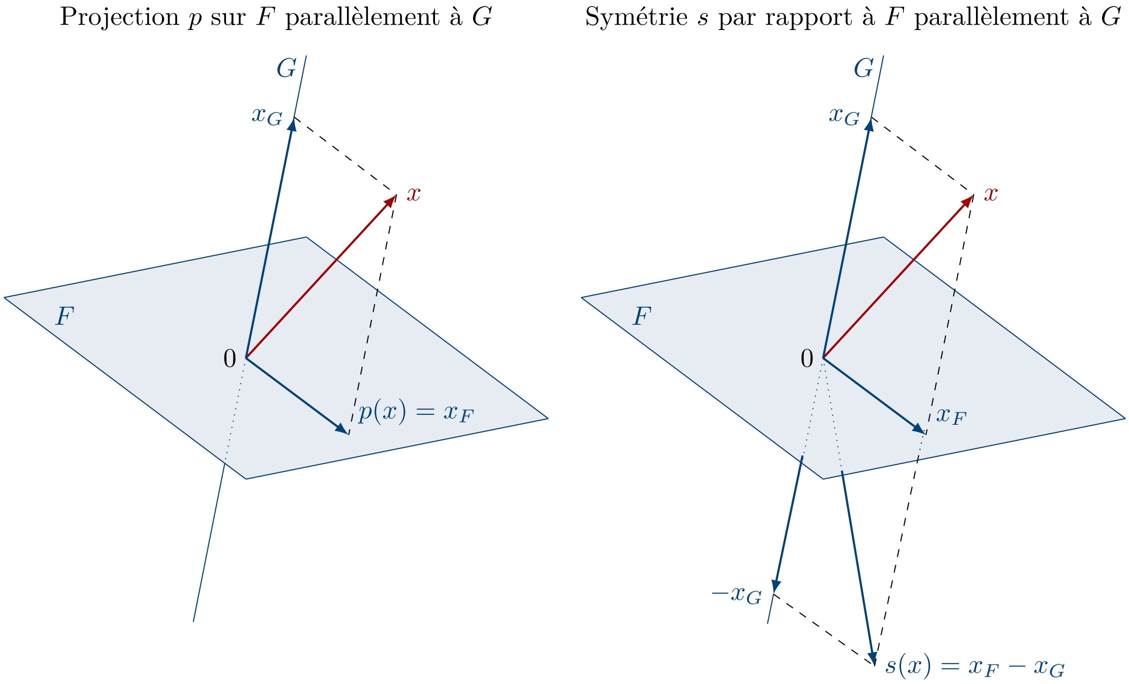
$$\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u) = \dim(E).$$

Projecteurs, symétries

Définition 29.19 (*Projection, symétrie*). Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Alors tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On définit alors deux applications.

1. La **projection sur** F **parallèlement à** G (ou encore le **projecteur sur** F **de direction** G est l'application p de E dans E définie pour tout $x \in E$ par $p(x) = x_F$.
2. La **symétrie par rapport à** F **parallèlement à** G est l'application s de E dans E définie pour tout $x \in E$ par $s(x) = x_F - x_G$.

Dans les deux cas, F est appelé la **base** et G la **direction** de la projection ou de la symétrie.



Proposition 29.20 - Espaces caractéristiques pour les projecteurs et les symétries.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On note p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie sur F parallèlement à G.

1. **Espaces caractéristiques des projecteurs**.

$$F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Ker}(p).$$

2. **Espaces caractéristiques des symétries**.

$$F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E).$$

Théorème 29.21 - Caractérisation algébrique des projecteurs.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.
Le cas échéant, $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires dans E et p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Théorème 29.22 - Caractérisation algébrique des symétries.

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. s est une symétrie si et seulement si $s^2 = \mathrm{Id}_E$.
Le cas échéant, $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Théorème 29.23 - Lien projecteur/symétrie.

Soit F et G deux sous-espace supplémentaires de E. On note p la projection sur F parallèlement à G, p' la projection sur G parallèlement à F et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Dans ces conditions :

$$p = \frac{s + \mathrm{Id}_E}{2}.$$

Formes linéaires et hyperplans

Définition 29.24 (*Hyperplan*). On appelle **hyperplan** de E le noyau H d'une forme linéaire non nulle u sur E.

Théorème 29.25 - Caractérisation géométrique des hyperplans.

Soit H une partie de E. Les assertions suviantes sont équivalentes.

(i) H est un hyperplan de E.

(ii) H est supplémentaire d'une droite de E.

Corollaire 29.26 - Dimension des hyperplans.

On suppose que E est de dimension finie égale à n.

1. Tout hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$,
2. Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$ est un hyperplan, c'est-à-dire le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Ceci signifie que les hyperplans de E sont exactement les sous-espaces vectoriels de E de dimension $n-1$.

Proposition 29.27 - Équation d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

On suppose que E est de dimension finie et on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{K}$ non tous nuls.
L'ensemble des vecteurs de E dont les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ dans la base $\mathcal{B}$ vérifient l'équation

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

est un hyperplan de E. Tout hyperplan a une équation de ce type.

Équations linéaires

Définition 29.28 (*Équation linéaire*). On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme $u(x) = y$ où u est une application linéaire de E dans F, y un vecteur fixé de F et où x, l'inconnue, est un vecteur de E.

Définition 29.29 (*Ensemble des solutions, équation homogène associée*). Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y \in F$.

1. **Résoudre** l'équation linéaire $u(x) = y$, c'est trouver tous les $x \in E$ tels que $u(x) = y$.
2. L'**ensemble des solutions** de l'équation linéaire $u(x) = y$ est par définition $\{x \in E \mid u(x) = y\}$.
3. L'équation linéaire $u(x) = 0_F$ est dite **homogène**.
4. L'**équation linéaire homogène associée** à l'équation linéaire $u(x) = y$ est l'équation $u(x) = 0_F$.

Théorème 29.30 - Structure de l'ensemble des solutions.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y \in F$.

- Si $y \notin \operatorname{Im}(u)$, alors l'équation linéaire $u(x) = y$ n'a aucune solution.
- Si $y \in \operatorname{Im}(u)$, alors il existe au moins une solution à l'équation linéaire $u(x) = y$. En notant x_p l'une de ces solutions (une solution « particulière »), l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de cette équation est

  $$\mathcal{S} = \{x_p + x_h \,:\, x_h \in \operatorname{Ker}(u)\}.$$

  Cet ensemble $\mathcal{S}$ est donc formé des vecteurs de E qui peuvent s'écrire comme la somme de x_p et d'une solution x_h de l'équation homogène associée $u(x) = 0_F$.

Méthodes et exercices à connaître

Montrer qu'une application est linéaire

La méthode de base de ce cours, à maîtriser parfaitement !

- Résultats du cours : Définition 29.1.
- Exercices ☕ : 29.1, 29.12, 29.14, 29.15
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ : 29.10

Déterminer un noyau, une image

Trouver une base d'un noyau d'une application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ revient à résoudre $u(x) = 0_F$ d'inconnue $x \in E$. Trouver une base d'une image est très rapide car on dispose très rapidement d'une famille génératrice (on rappelle que les images des vecteurs d'une base engendrent l'image, cf. Proposition 29.12).

En dimension finie, le théorème du rang (Théorème 29.18) peut être très utile une fois qu'on a trouvé une base du noyau (resp. de l'image), car il donne immédiatement la dimension de l'image (resp. du noyau).

- Résultats du cours : Définition 29.8, Proposition 29.9, Proposition 29.12, Théorème 29.18
- Exercices ☕ : 29.1, 29.11, 29.12, 29.13, 29.14
- Exercices ☕☕ : 29.4 (contre-exemples plus difficiles), 29.5, 29.7 (contre-exemples plus difficiles), 29.8, 29.9, 29.15, 29.18, 29.23, 29.26
- Exercices ☕☕☕ : 29.6, 29.19, 29.20, 29.21, 29.22, 29.24, 29.25

Déterminer si une application linéaire est injective ou surjective

Déterminer le noyau et l'image peuvent être utile pour décider si une application linéaire est injective (cf. Proposition 29.11) ou surjective (cf. Proposition 29.10).

En dimension finie, l'utilisation du rang est très utile pour économiser des calculs. Par exemple, si l'espace d'arrivée est de dimension strictement supérieure à celle de départ, l'application linéaire ne peut pas être surjective (cf. Proposition 29.16). Si les dimensions sont égales, l'injectivité équivaut à la surjectivité (cf. Théorème 29.17).

- Résultats du cours : Définition 29.3, Définition 29.8, Théorème 29.10, Théorème 29.11, Proposition 29.12, Définition 29.15, Proposition 29.16, Théorème 29.17, Théorème 29.18
- Exercices ☕ : 29.1, 29.11, 29.12
- Exercices ☕☕ : 29.15, 29.17, 29.31, 29.32
- Exercices ☕☕☕ : 29.3, 29.16

Déterminer l'expression d'un projecteur ou d'une symétrie donnés

Dans un espace vectoriel E, on peut vous demander l'expression d'une symétrie (resp. d'un projecteur) parallèlement à un espace F donné sur un espace G donné. Dans ce cas, il faut montrer que $F \oplus G = E$ avec une analyse-synthèse et trouver explicitement la décomposition d'un vecteur $x \in E$ comme la somme d'un vecteur $x_F \in F$ et d'un vecteur $x_G \in G$ (donc l'analyse-synthèse est difficilement contournable, même en dimension finie).

- Résultats du cours : Définition 29.19.
- Exercices ☕ : 29.27, 29.30, 29.33
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ :

Décider si un endomorphisme est un projecteur ou une symétrie

C'est un peu le problème inverse de celui décrit dans le paragraphe précédent. On vous donne un endomorphisme u et on vous demande de vérifier que c'est un projecteur (dans ce cas il faut tester si $u^2 = u$, cf. Théorème 29.21 ; projeter une fois revient au même que projeter deux fois) ou que c'est une symétrie (dans ce cas il faut tester si $u^2 = \mathrm{Id}$, cf. Théorème 29.22 ; quand on fait deux fois une symétrie, on se retrouve au point de départ).

On demande aussi presque systématiquement les espaces caractéristiques de ces endomorphismes. Tout est dans la Proposition 29.20.

Si on demande de déterminer un projecteur à partir d'une symétrie (ou vice-versa), le Théorème 29.23 est utile.

- Résultats du cours : Définition 29.19, Proposition 29.20, Théorème 29.21, Théorème 29.22, Théorème 29.23, Théorème 29.23.
- Exercices : 29.28, 29.29, 29.34, 29.35, 29.36
- Exercices : 29.37
- Exercices : 29.38

Utiliser les équations linéaires

Pas grand chose à savoir : il faut connaître les définitions et le théorème qui donne la structure de l'ensemble des solutions (Théorème 29.30).

- Résultats du cours : Définition 29.28, Définition 29.29, Théorème 29.30.
- Exercices : 29.41
- Exercices : 29.42
- Exercices :

Utiliser les formes linéaires et les hyperplans

Au programme, mais pas le plus important du chapitre. Tout ce qui est avant est prioritaire par rapport à ce paragraphe (mais le cours sur cette partie est à bien connaître !).

- Résultats du cours : Définition 29.24, Théorème 29.25, Corollaire 29.26, Proposition 29.27.
- Exercices :
- Exercices : 29.39, 29.40
- Exercices :